从头开始

Cpt 1.1 Lie 代数与基本性质

1. L 为向量空间：$L\times L\longrightarrow L$

$$(x,y)\longmapsto[x,y]$$

满足三公理：斜反，双线，Jacobi 式。

2. H,K 为 L 子空间，则 $[HK]=[KH]$.（未必为子代数）

3. A 为 F 代数，即向量空间赋上乘法，满足双线性.

（结合） 则 A 上自然定义 Lie 代数：$[A]$，$[ab]=ab-ba$.

4. 子代数与理想.

① 子代数：H 为 L 子空间，且 $[H,H]\subseteq H$

② 理想：I 为 L 子空间 且 $[IL]\subseteq I$，记 $I\lhd L$

注：$IL=LI$，故无左右之分，此外理想必为子代数.

③ 性质：(1) $H,K\lhd L$，则 $H\cap K\lhd L$，

$H+K\lhd L$：$[H+K,L]\subseteq[HL]+[KL]\subseteq H+K$

(2) H,K 为 L 子代数，则 $H\cap K$ 为 L 子代数.（$H+K$ 未必）

(3) $H\lhd L$，K 为 L 子代数，则 $H+K$ 为 L 子代数.（$[H+K,H+K]\subseteq[K,K]+H$

5. 商与同态.

① 若 $I\lhd L$，对域作商空间 L/I，定义 $[x+I,y+I]=[xy]+I$ 作成商 Lie 代数

证：$[x+i,y+j]=[xy]+i_0$ ⇒ 良定义，三性质继承于 L.

② 则称 θ 为 Lie 同态，若 $\theta:L_1\to L_2$，为线性映射，s.t. $\theta[x,y]=[\theta x,\theta y]$，

当 θ 为双射时，即称 θ 为同构， ⇒ 模同态.

③ 基本定理：对同态 $\theta:L_1\to L_2$

有 $\theta(L_1)$ 为 L_2 子代数，$\ker\theta\lhd L_1$ 且 $L_1/\ker\theta\cong\theta(L_1)$

证：$[\theta(L_1),\theta(L_1)]=\theta[L_1,L_1]\subseteq\theta(L_1)$ 故子代数.

$\theta[L_1,\ker\theta]=[\theta(L_1),0]=0$，故 $\ker\theta\lhd L_1$

记 $I=\ker\theta$，考虑 $\pi: L_1/I \to \theta(L_1)$，$\pi(x+I)=\theta(x)$

由线性映射知良定义，且双射。

而 $\pi[x+I, y+I]=\pi([x,y]+I)=\theta([x,y])=[\theta(x),\theta(y)]=[\pi(x+I),\pi(y+I)]$ #

(4) 相关定理：$I \lhd L$，H 为 L 子代数，则

$$I \lhd I+H,\ I\cap H \lhd H \text{ 且 } (I+H)/I \cong H/I\cap H$$

证：$[I, I+H] \subseteq [I, L] \subseteq I$，$[I\cap H, H] \subseteq I\cap H$. $\Rightarrow I \lhd I+H$，$I\cap H \lhd H$

考虑 $\pi: h+I \mapsto h+(I\cap H)$，由线性空间同构 $\Rightarrow$ 双射，良定义

再由 $\pi([h_1+I, h_2+I])=\pi([h_1,h_2]+I)=[h_1,h_2]+I\cap H=[h_1+I\cap H, h_2+I\cap H]$

$=[\pi(h_1+I), \pi(h_2+I)]$，得同态。

小结
- 基本定义
  - Lie = 线性空间 + 运算 → 公理
  - k 代数 A → 自然定义 $[A]$
- 子代数与理想：
  - $[H,H]\subseteq H \Rightarrow$ 子代数
  - $[I,L]\subseteq L \Rightarrow$ 子理想.
  - $I,J \lhd L$，H,K 子代数 $\to$ $I\cap J$，$I+J \lhd L$；$H\cap K$，$I+H$ 子代数.
- 商与同态
  - $I \lhd L$，$[x+I, y+I]=[x,y]+I$.
  - θ 同态，$\theta[x,y]=[\theta(x),\theta(y)]$
  - 基本定理：
    - $Im(\theta)$ 为子代数. $\ker\theta$ 为理想.
    - 同态 $\Leftrightarrow$ 商，$L_1/\ker\theta \cong Im(\theta)$
    - $(I+H)/I \cong H/H\cap I$.

Cpt1.2. 表示与模

1. $M_n(k)$ 关于矩阵乘法为 k 代数. 其上自然诱导了 Lie 代数 $[M_n(k)]$

记 $gl_n(k)=[M_n(k)]$ 为一般线性代数. 则 $\dim gl_n(k)=n^2$.

2. 同态 ρ 称为 L 在 k 上的 n 次表示，若 $\rho: L\to gl_n(k)$

ρ 与 ρ' 称为等价表示，若 $\exists$ 可逆阵 T, s.t. $\forall x\in L$, $\rho(x)=T^{-1}\rho'(x)T$.

3. 左 L 模：二元运算 $L\times V \to V$ s.t. (1), xv 对 x, v 线性

$(x,v)\mapsto xv$. (2) $[x,y]v=x(yv)-y(xv)$

注：条件 (1),(2) $\Leftrightarrow \rho: L\to gl(V)$ 为线性同态

条件(2) $\Rightarrow$ ρ 诱导 $L \to gl(V)$ Lie同态.

4. 诱导表示

若 V 以 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为基，$\forall x \in L$，$xe_j = \sum_i a_{ij} e_i$

令 $\rho: L \longrightarrow M_n(k)$ 则 ρ 为 L 的 n 次表示.

$x \longmapsto (a_{ij})$，

注：$x(e_1, \cdots, e_n) = (xe_1, \cdots, xe_n) = (\sum_i a_{i1} e_i, \cdots, \sum_i a_{in} e_i)$

$= \left((e_1 \cdots e_n)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, (e_1 \cdots e_n)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}\right)$

$= (e_1 \cdots e_n) A_x$，$A_x = (a_{ij})_{n \times n}$

即：$\rho(x)$ 实际上是 x 诱导线性变换对应的矩阵.

证：记 $\alpha = (e_1, \cdots, e_n)$，$[xy]\alpha = x(y\alpha) - y(x\alpha)$

$= x(\alpha \cdot A_y) - y(\alpha \cdot A_x)$

$= \alpha A_x A_y - \alpha A_y A_x$

$= \alpha (A_x A_y - A_y A_x)$

$= \alpha [A_x, A_y]$

$\therefore \rho([xy]) = [A_x, A_y] = [\rho(x), \rho(y)]$，即 ρ 为 n 次表示.

由基和矩阵知，取不同基诱导的表示等价

注：与环模类似，给出 M 的左 R 模 $\Leftrightarrow$ 建立 $R \to \mathrm{End}\,M$ 的合同态.

⊗ 给出 V 的左 L 模 $\Leftrightarrow$ 建立 $L \to \mathrm{End}\,V$ 的 Lie 同态（即线性+保[ ]）

证：$\Rightarrow$ 上面已给出

$\Leftarrow$：$\varphi: L \to \mathrm{End}\,V$，令 $xv = \varphi(x)(v)$，

由 φ 的线性性，及线性变换性质，(1) 成立.

由 Lie 同理，$[xy]v = \varphi([xy])(v) = [A_x, A_y](v)$ 满足 (2)

5. 例：L 自身可视作左 L 模，称为 L 的伴随模 (adjoint module)

证：令 $f: L \times L \to L$，$(x, y) \mapsto [xy]$，双线性 ✓

且 $[[xy]z] = [x[yz]] + [y[zx]] = [x[yz]] - [y[xz]]$ 满足 (2) ✓

注：此时，将诱导表示 $\rho: L \to \mathrm{End}\,L$，(未必嵌入)

此外，$\forall\, x \in L$，定义运算：$ad_x: L \to L$

$$y \mapsto [xy]$$

容易验证：$ad_{[xy]} := ad_x \cdot ad_y - ad_y \cdot ad_x$

即 $ad: L \to \mathrm{End}\,L$，$x \mapsto ad_x$ 为 L 的表示

6. 子模与分解性

V 为 L 模，$U \le V$ (子空间)，$H \le L$ (子空间)，记 HU 为 $\{hu \mid h\in H, u \in U\}$ 张成的空间

(1) 若 $LU \subseteq U$，则 U 作成 L 模，并称为 V 的子模.

(2) V，0 $\Rightarrow$ V 平凡子模.

(3) V 只有平凡子模 $\Rightarrow$ 称 V 不可约 (irreducible)

(4) V 可分解为不可约子模直和 $\Rightarrow$ 称 V 完全可约.

(5) V 不能分解为非平凡子模的直和 $\Rightarrow$ 称 V 不可分

注：(3) $\Rightarrow$ (4)，(5)，反之不然

7. 右模可类似定义讨论：(1) vx 双线性，(2) $v[xy] = (vy)x - (vx)y$

注：同样地，可以引入"反代数"讨论，L^{opp} 运算与 L 相反. $\{xy\} = [yx]$

L^{opp} 相当于做了转置，仍为 Lie 代数. ($A \to A^T$ 相当于 $M_n(k) \to M_n(k)^{opp}$)

- 表示与模
  - $gl_n(k) := [M_n(k)]$，$\dim = n^2$，一般线代
  - 左模与表示
    - L 在 k 上 n 次表示 → ρ 为同态且仅 $L \to gl_n(k)$
      - 等价表示，$\rho'(x) = T^{-1}\rho(x)T$，$\forall x \in L$
    - 左 L 模
      - 双线性，左乘
      - 保同态 $[xy]v$
    - 诱导表示 → $x \mapsto \rho(x) = A_x$ (线性代数)
      - L 作自身模：伴随模
  - 子模分解
    - 子模，平凡子模
    - 不可约，完全可约，不可分
    - 右模："反代数" L^{opp} 类比转置.

Cp11.3. 交换、幂零、可解

1. 记号和性质

① 令 $L^1=L$, $L^{n+1}=[L^n,L]$, $\forall n\geq 1$ 则 $L^n\lhd L$, $L^{n+1}\subseteq L^n$

lemma: $I,J\lhd L \Rightarrow [IJ]\lhd L$, $I+J\lhd L$.

pf: $[[IJ],L]\subseteq[I[JL]]+[J[IL]]\subseteq[IJ]+[JI]=[IJ]$

Pf: $L\lhd L\Rightarrow L^2=[L,L]\lhd L$.

$L^n\lhd L \Rightarrow L^{n+1}=[L^n,L]\lhd L$

note: $L=L^1\supseteq L^2\supseteq\cdots$ 构成理想链.

②. 记 $L^{(0)}=L$, $L^{(n+1)}=[L^{(n)},L^{(n)}]$, $n\geq 0$, 则 $L^{(n)}\lhd L$, $L^{(n+1)}\subseteq L^{(n)}$

note: $L^{(0)}\supseteq L^{(1)}\supseteq\cdots$ 构成理想链.

③. 性质: (1) $[L^m,L^n]\subseteq L^{m+n}$, $\forall m,n\geq 1$

(2) $L^{(n)}\subseteq L^{2^n}$, $\forall n\geq 0$

Pf: (1), 对 m 归纳, $m=1$ 成立.

$<m$ 成立时, $[L^m,L^n]=[[L^{m-1},L]L^n]\subseteq[L^{m-1}[LL^n]]+[L[L^{m-1},L^n]]$

归纳 $\subseteq[L^{m-1}L^{n+1}]+[L\,L^{m+n-1}]$

$\subseteq L^{m+n}$

(2). $[L^{(0)},L^{(0)}]\subseteq L^{2^0}$, $L^{(n+1)}=[L^{(n)},L^{(n)}]\subseteq[L^{2^n},L^{2^n}]\subseteq L^{2^{n+1}}$

2. 可解、交换、幂零.

①. L 交换 $\Leftrightarrow L^2=0 \Leftrightarrow \forall x,y\in L$, $[x,y]=0$.

note: L 交换, 则 L 任一子空间均为子理想.

② L 幂零 $\Leftrightarrow \exists n\geq 1$, $L^n=0$.

note: L 幂零 $\Rightarrow$ L 任一子代数子商代数幂零.

③. L 可解 $\Leftrightarrow \exists n\geq 0$, $L^{(n)}=0$.

note: L 可解 $\Rightarrow$ L 任一子代数子商代数可解

note2: 交换 $\Rightarrow$ 幂零, 幂零 $\Rightarrow$ 可解.

3. $I \lhd L$, I, L/I 可解 $\Rightarrow L$ 可解.

Pf: L/I 可解 $\Rightarrow \exists\, n$, $(L/I)^{(n)}=0 \Rightarrow L^{(n)} \subseteq I$

I 可解 $\Rightarrow \exists\, m$, $I^{(m)}=0 \Rightarrow L^{(n+m)} \subseteq I^{(m)}=0 \Rightarrow L$ 可解

note: $(L/I)^{(n)} = (L^{(n)}+I)/I$.

$(L/I)^{n} = (L^{n}+I)/I$.

note2, L/I 幂零 $\Rightarrow \exists\, n$, $L^{n}=0$. I 幂零 $\Rightarrow \exists\, m$, $I^{m}=0$.

但 $L^{(n+m)}=(L^{(n)})^{(m)}$, 而 $L^{n+m}\neq (L^{n})^{m}$

即类似结论对幂零不成立.

5. $\dim L<\infty \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists!\, R \lhd L$, R 极大可解,

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \forall\, I/R \lhd L/R$, 若 I/R 可解, 则 $I/R=0$.

Pf: (1) 只须证 I, J 可解 $\Rightarrow I+J$ 可解

$\because (I+J)/I \cong J/I\cap J \Rightarrow (I+J)/I$ is soluble

$\Rightarrow I+J$ is soluble. #

(2) $I/R \lhd L/R$ 可解 $\Rightarrow I$ is soluble

$\Rightarrow I+R=R$, $I \subseteq R$.

$\Rightarrow I/R=\bar{0}$

note1: 可解 + 可解 = 可解 $\Rightarrow$ 极大存在性

此时, 称 R 为 L 的可解根

6. 单与半单

(1). L 的可解根为 0, 即 L 只有零可解理想 $\Rightarrow$ 称 L 为半单 Lie 代数.

note: 任 Lie 代数, 可通过商可解根得到半单 Lie 代数.

(2) L 只有平凡理想 $\Rightarrow$ 称 L 为单 Lie 代数.

7. $\dim L=1 \Rightarrow \forall x, y \in L$, $[xy]=-[yx]=0$

$\Rightarrow L$ 为 Abelian, 且为单代数.

此时, 称 L 为平凡单 Lie 代数.

note: 任意2个 F 上一维 Lie 代数同构.

E. L 单且非平凡 ⇒ L 为半单代数.

证: 若 L 非半单 ⇒ ∃ $0\neq R$ 为 L 理想

⇒ $L=R$, 即 L 是可解的.

⇒ ∃ $n\geq 0$, $L^{(n)}=0$, 于是 $L^{(1)}\neq L$

⇒ $L^{(1)}$ 为 L 真子理想. ∴ $L^{(1)}=0$

⇒ L 为 Abelian, ∴ L 任一子空间为理想

⇒ $\dim L=1$, 即 L 为平凡单代数.

可解幂零

- 记号
  - $L^n=[L^{n-1},L] \to L^n \lhd L$ 且 $L^n\subseteq L^{n-1}$, $L^1=L$
  - $L^{(n)}=[L^{(n-1)},L^{(n-1)}] \to L^{(n)}\lhd L$ 且 $L^{(n)}\subseteq L^{(n-1)}$, $L^{(0)}=L$
  - 性质: $[L^n,L^m]\subseteq L^{n+m}$, $L^{(n)}\subseteq L^{2^n}$
- 三类代数
  - Abelian: $L^2=0$, 任意子空间 $\lhd L$
  - nilpotent: ∃n, $L^n=0$; 子商幂零
  - solvable: ∃n, $L^{(n)}=0$; 可解 ⇔ 子商可解
- 单与半单
  - ∃! 极大可解 R, s.t. L/R 半单
  - 非平凡单 ⇒ 半单

$(\subseteq, \lhd)$

Cpt1. 基础内容

- 基本定义, 子结构, 商结构 (同态)
- 表示与模
- 分解性质
  - 幂零, 可解, 交换
  - 单与半单

补: ① Lie 上, $[H,K]=[K,H]$ ⇒ 乘法交换 ⇒ 理想无左右之分.

② Jacobi 式, 可用伴随作用理解, 即.

$$[[xy]z]=ad_{[xy]}(z)=(ad_x\cdot ad_y-ad_y\cdot ad_x)(z)$$

$$=[x[yz]]-[y[xz]]$$ 在反序处变号.

③.