Cpt2. 了解与掌握 Lie 代数的表示.

总假定, k 取复数域 C,

L 为 C 上有限维 Lie 代数

Cpt2.1 了解 Lie 代数表示.

1. 一维表示.

① $\dim V=1$, $\rho: L\to C$ 为 Lie 表示, $\Rightarrow$ 称 ρ 为一维表示.

② 刻画: $\rho: L\to C$ 为线性映射, 则 ρ 为一维表示 $\Leftrightarrow$ $\rho(L^2)=0$.

pf: 由 $\rho[x,y]=[\rho(x),\rho(y)]=\rho(x)\cdot\rho(y)-\rho(y)\cdot\rho(x)=0$. 立见.

note: V 为 L 模, $\rho: L\to gl(V)$ 为相应表示

若 $\rho(L)$ 为 $gl(V)$ 中一维子空间或 $\rho(L)=0$.

则可得到 $\tilde{\rho}: L\to C$ 为 L 的一维表示.

此时, L 对 V 的模作用为标量乘法作用.

③. V 为 L 模, $\lambda: L\to C$ 为一维表示, 称 λ 为 L 模 V 的权.

令 $V_\lambda=\{v\in V \mid x\cdot v=\lambda(x)v, \forall x\in L\}$, 称为 λ 的权空间.

note: 线性代数上, $\forall x\in L$, x 在 V 上有特征值与特征子空间.

Lie 代数中, 权相当于一族线性变换的特征值.

权空间相当于相应的特征子空间.

2. 了解模分解定理

① 引理1: $H\lhd L$, 对 L 任一子空间 I, 若 $[H,L]\subseteq I\subseteq H$, 则 $I\lhd L$

2: $H\leq L$, 对 L 任一子空间 K, 若 $[H,H]\subseteq K\subseteq H$, 则 $K\leq L$

3: V 为 L 模且 $\dim V<\infty$ $\Rightarrow$ V 上总存在不可约模

4. H, K 为 L 子代数, 且 $L=H+K$, V 为 L 模 $\Rightarrow$ V 为 H, K 模,

且 V 上任一子空间 W, W 为 V 的 L 子模 $\Leftrightarrow$ W 为 V 的子H模且子K模

② L 为可解 Lie 代数，V 为有限维不可约 L 模，则 $\dim V=1$.

recall：V 为不可约 L 模 $\Leftrightarrow$ V 只有平凡子模.

Pf：① L 可解 $\Rightarrow$ $L^2 \neq L$，否则 $L^{(n)}=L$

令 I 为 L 子空间，且 $L^2 \subseteq I \subseteq L$，$\dim I = n-1$，

由引理1，$I \triangleleft L$，且对 $\forall x \notin I$，有 $L = I \oplus \mathbb{C}x$（Lie 直和）

② 对 $\dim L$ 作归纳，

若 $\dim L = 1 \Rightarrow L = \mathbb{C}x \Rightarrow$ 取 x 在 V 上特征向量 v.

$\Rightarrow \mathbb{C}v$ 为 V 子模 $\Rightarrow V = \mathbb{C}v$

若 $\dim L > 1$，V 视为 I 模，设 W 为 V 的不可约 I 子模，

由归纳，$\dim W = 1 \Rightarrow W$ 诱导 I 的一维表示 $\lambda: I \to \mathbb{C}$

s.t. $\forall w \in W$，$y \in I$，$yw = \lambda(y)w$.

③ 令 $U = \{u \in V \mid yu = \lambda(y)u,\ \forall y \in I\}$，为 λ 的权空间.（一阶）

由 $W \subseteq U \Rightarrow U \neq \phi$

$\forall u \in U$，$\forall y \in I$，$y\cdot(xu) = (xy - [xy])(u)$

$= x(yu) - [xy](u)$

$= \lambda(y)xu - \lambda([xy])(u)$

若 $\lambda[xy]=0$，$\forall y \in I \Rightarrow U$ 为 $\mathbb{C}x$ 子模 $\Rightarrow U$ 为 V 的 L 子模.

由 V 不可约 $\Rightarrow V = U \Rightarrow V$ 整个为 I 的权 λ 的权空间.

$\Rightarrow V$ 任一子空间为 I 模

由 $L = I \oplus \mathbb{C}x$，取 x 在 V 上特征向量 v，则 $\mathbb{C}v$ 作成 L 模.（引理4）

V 不可约 $\Rightarrow V = \mathbb{C}x$，命题即证.

④ 下证 $\lambda([xy])=0$，$\forall y \in I$

任取 $0 \neq u \in U$，令 $v_0 = u$，$v_i = xv_{i-1}$，

$\Rightarrow \exists p \geq 0$，$\{v_i \mid i \leq p\}$ 线性无关，$\{v_i \mid i > p\}$ 线性相关.

取 $V_0 = \langle v_0, \cdots, v_p \rangle$ 为 u 生成的循环子空间

归纳证 $yv_i - \lambda(y)\cdot v_i \in \mathrm{span}\{v_0, \cdots, v_{i-1}\}$.

$i=0$ 时，$yv_0 = yu = \lambda(y)u = \lambda(y)v_0$.

(5) i 成立时. $yv_{i+1} = yxv_i = xyv_i - [xy]v_i$

$= \lambda(y)xv_i - [xy]v_i + x\cdot \mathrm{span}\{v_0 \cdots v_{i-1}\}$

$= \lambda(y)\cdot v_{i+1} + \mathrm{span}\{v_0, \cdots, v_i\}$

于是 V_0 为 V 的 I 子模 $\Rightarrow$ V_0 为 V 的 L 子模 $\Rightarrow$ $V_0 = V$

$$\therefore [xy]\cdot(v_0 \cdots v_p) = (v_0 \cdots v_p)\begin{pmatrix} \lambda[xy] & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda[xy] \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{tr}_V([xy]) = (p+1)\lambda[xy] = \mathrm{tr}(xy - yx) = 0$

$\Rightarrow \lambda[xy] = 0$，证毕.

简记：目标：构造 V 的一维子模

① . $L = I \oplus \mathbb{C}x \Rightarrow L$ 子模 $\Leftrightarrow$ I 子模 + $\mathbb{C}x$ 子模.

故 只须 找 I 与 $\mathbb{C}x$ 的公共一维子模.

② . V 为有限 I 模，取不变的，得到 I 的 权 λ.

③ 若 λ 一阶 权空间 V_λ 为 $\mathbb{C}x$ 子模，任取 x 的一维特征子空间，完毕.

问题归纳为 $\lambda[xy] = 0$，$\forall y \in I$.

④ . 取 $0 \neq u \in V_\lambda$，令 u 在 x 下生成循环子空间 $V_0 = \mathrm{span}\{u, xu, \cdots, x^p u\}$.

则 V_0 为 I 子模且为 x 子模（V_0 未必含于 V_λ，还不能直接得证）

⑤ . 利用 Lie 括号性质. $y\cdot x_1 \cdots x_n u = \underbrace{x_1 y x_2 \cdots x_n u}_{\text{交换}} - \underbrace{[x_1, y]\cdot x_2 \cdots x_n u}_{\text{减次}}$.

推导 $y \in I$ 在 V_0 特殊基下矩阵的对角为 $\lambda(y)$.

note: $xy = yx - [yx]$ 是 Lie 代数中常用的技术手段.

即，换序只产生一个低阶影响项.

recall: V 为 L 模 $\Leftrightarrow$ Lie 同态 $\rho: L \to gl(V) = M_n(\mathbb{C})$

$\tilde{\rho}: L \to P^{-1}M_n(\mathbb{C})P$ 称为 ρ 的等价表示.

此外：$\rho(L)$ 为 $M_n(\mathbb{C})$ 的子代数.

反之，$M_n(\mathbb{C})$ 的任一子代数 诱导了 $V=\mathbb{C}^n$ 的 Lie 模.

下面 我们试图 给出 L模 的形式更好的表示.

③. 推论1：L可解，V为n维 L模，则有表示

$$\rho: L \to gl(V) = M_n(\mathbb{C}), \quad x \mapsto \begin{pmatrix} * & * \\ & A \end{pmatrix}$$ 并诱导 表示 $\rho': L \to M_{n-1}(\mathbb{C}), \ x \mapsto A$

pf: 由上一命题，取 V的不可约 L模 做扩充，

$$\Rightarrow \rho(x) = \begin{pmatrix} * & * \\ & A \end{pmatrix}$$

由分块矩阵计算规则 $\begin{pmatrix} * & * \\ & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ & A_1A_2 \end{pmatrix}$ 之知

note：对$\rho(L)$ 取向量 v，L在 $V/\mathbb{C}v$ 上作用即诱导之一 ρ'.

④. 推论2：L可解，V为有限维 L模，则有表示

$$\rho: L \to gl(V) = M_n(\mathbb{C})$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$$ ，即上三角矩阵

pf: 反复使用上一推论.

note：L可解 $\Rightarrow$ $\rho(L)$ 上矩阵可同时上三角化.

3、L为可解 Lie 代数，且 $\dim L = n$，则 L作为伴随模，

得到理想链：$0 = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_{n-1} \subseteq I_n = L$，其中 $\dim I_r = r$.

note：L作为伴随模，其 Lie 理想 $\Leftrightarrow$ 模理想（即不变子空间）

☆. note2：L有逐一上升理想链 $\Leftrightarrow$ $\forall$ 有限 L模，$\rho(L)$ 可同时上三角化.

Cpt2.2. 幂零根的 Lie 表示.

0. recall Jordan 理论

若 θ 为 V上线性变换，且特征多项式为 $\chi(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_r)^{m_r}$

则存在唯一分解：$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$，

其中 V_i 为 θ 根子空间，且 $\theta|_{V_i}$ 的特征多项式为 $(t-\lambda_i)^{m_i}$

note：V未必有特征子空间的直和分解，但必有根子空间的直和分解

1. L 为幂零 Lie 代数，V 为 L 模，

则 $\forall y\in L$，$\rho(y)$ 的根子空间均为 V 的子模

Pf：设 V_0 为 $\rho(y)$ 对特征值 λ 的根子空间，即 $V_0=\{v\in V \mid (y-\lambda)^n v=0,\ \exists n\}$

$\forall x\in L$，$v\in V_0$，记 $x_1=x$，$x_i=[y,x_{i-1}]$，由 L 幂零 $\Rightarrow \exists n$，$L^n=0$，$\Rightarrow x_n=0$

则 $(y-\lambda)x_i v=([y,x_i]+x_i y-\lambda x_i)v=[y,x_i]v=x_{i+1}v$

$\Rightarrow (y-\lambda)^{n-1}x_1 v=x_n v=0$

$\Rightarrow xv\in V_0$，即 $LV_0\subseteq V_0$，V_0 为 V 的 L 子模

推论：$\forall x,y\in L$，$\rho(x)$ 的根子空间分解可在 $\rho(y)$ 下进一步细分.

note：书中证明用的式子为

$$(\rho(y)-(\alpha+\beta)1)^n x v=\sum_{i=0}^{n} C_n^i\left((\mathrm{ad}\,y-\beta\cdot 1)^i x\right)\left((\rho(y)-\alpha 1)^{n-i}v\right)$$

2. L 幂零，V 为有限维不可分解 L 模，则 V 有一组基，s.t.

$$\rho(x)=\begin{pmatrix}\lambda(x) & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda(x)\end{pmatrix}$$

Pf：L 幂零 $\Rightarrow$ 可解 $\Rightarrow$ $\rho(x)=\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & *\end{pmatrix}$

若某一 x，s.t. 对角线不相等 $\Rightarrow$ 作 $\rho(x)$ 根子空间分解

由上一命题，与 V 不可分解矛盾.

note：令 $\lambda: L\to \mathbb{C}$，$x\mapsto\lambda(x)$，则 λ 作成 L 的一维表示.

3. 权空间分解，$\dim V=n$.

①. 方法1：记 $V_{\lambda,x}=\{v\in V \mid (\rho(x)-\lambda(x)\cdot 1)^n v=0\}$

即 $\rho(x)$ 根子空间分解中，特征值 $\lambda(x)$ 的根空间

记 $V_\lambda=\{v\in V \mid \forall x\in L，有\ (\rho(x)-\lambda(x)\cdot 1)^n v=0\}$.

设 $L=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_m\}$，则 $V_\lambda=\bigcap_{i=1}^{m}V_{\lambda,x_i}$

对 V 逐级分解."(1) $V=\bigoplus_{\lambda}V_{\lambda,x_1}$ 为关于 $\rho(x_1)$ 根子空间分解，$\lambda(x_1)$ 相等的记合并

(2) 每一 V_{λ,x_1}，关于 $\rho(x_2)$ 作根子空间分解

得 $V=\bigoplus_{\lambda} V_{\lambda,\{x_1,x_2\}}$，$(\lambda(x_1),\lambda(x_2))$ 相当区分开

(3) 依次下去，最终即得 $V=\bigoplus_{\lambda} V_\lambda$

②. L 幂零，V 为有限维 L 模，$\dim V=n$，对 λ 为 L 的一维表示

则 V 有唯一分解 $V=\bigoplus_{\lambda} V_\lambda$

pf: V 有限维 $\Rightarrow$ V 可分解为若干不可分解子模的直和.

设 $V=\bigoplus_{\lambda} W_\lambda$，每一子模 W_λ 诱导一维表示 $\lambda: L\to \mathbb{C}$.

由 $\rho(L)$ 限制在 W_λ 上的矩阵形式 $\Rightarrow$ $W_\lambda \subseteq V_\lambda$

只须证 $V_\lambda \cap \bigoplus_{\mu\neq\lambda} V_\mu = 0$

note: 这里证明思路应与线代根子空间方法相近.

此二处证明方法略过.（使用①足够了）

③. $V_\lambda\neq 0$ 时，称一维表示 λ 为 V 的权，V_λ 为 λ 的权空间，

$V=\bigoplus_{\lambda} V_\lambda$ 称为 V 的权空间分解.

④. 推论: L 幂零，V 为有限维 L 模 $\Rightarrow \rho: L\to gl(V)$

$$\Rightarrow \exists\, L \text{ 上一组基 s.t. } \rho(x)=\begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & & & * \\ & \lambda_1(x) & & & \\ & & \lambda_r(x) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_r(x) \end{pmatrix} \quad \forall x\in L$$

4. Engel's theorem.

L 为幂零 Lie 代数 $\Leftrightarrow$ $\forall x\in L$, $\mathrm{ad}x: L\to L$ 为幂零元.

pf: $\Rightarrow$: L 幂零 $\Rightarrow \exists\, n$ s.t. $L^n=0$

$\Rightarrow \mathrm{ad}x^{n+1}(y)=0,\ \forall y\in L$

$\Rightarrow \mathrm{ad}x$ 幂零.

$\Leftarrow$: 反证法. 反设 H 为 L 极大幂零子代数,

即 $H\neq L$ 且 $\forall K\supsetneq H$ 为 L 子代数，有 K 非幂零.

① 则 L 可视为 H 模，由 $[H,H]\subseteq H \Rightarrow H$ 可视为 H 模.

$\Rightarrow$ L/H 为商 H 模，取其上不可约子模 M/H.

② 由 H 可解 $\Rightarrow M/H$ 一维 $\Rightarrow$ 诱导 H 的一维表示 $\lambda: H\to \mathbb{C}$,

即 $\forall\, m+H \in M/H,\ x\in H$，有 $\mathrm{ad}x(m+H) = \lambda(x)(m+H)$

也即 $[x,m] = \lambda(x)m + h$，

由 H 幂零 $\Rightarrow \mathrm{ad}x$ 幂零，$\Rightarrow \lambda(x)=0$，否则 $\mathrm{ad}x^n(m)\neq 0.\ \forall n.$

③. 于是 $[H,M] = \langle [x,m]\rangle \subseteq H \Rightarrow [x,H]\subseteq H,\ \forall x\in M.$

设 $M = H\oplus \mathbb{C}x \Rightarrow [M,M] = [H\oplus\mathbb{C}x, H\oplus\mathbb{C}x] \subseteq [H,H]+[H,x]\subseteq H$

于是 M 为 L 子代数，H 为 M 子理想 即 $H\lhd M\leq L$

④ 只须证明 M 幂零 即可导出矛盾.

※ 断言 $\forall\, i>0$，$\exists\, e(i)$ s.t. $M^{e(i)}\subseteq H^i$

$i=1$ 时，$M^2\subseteq H^1 \Rightarrow$ 命题成立.

(1) 归纳假设 $M^{e(r)}\subseteq H^r$

则 $M^{e(r)+1} = [M^{e(r)}, H+\mathbb{C}x] \subseteq H^{r+1} + [M^{e(r)}, x]$

$\Rightarrow M^{e(r)+1} \subseteq H^{r+1} + \mathrm{ad}x(M^{e(r)})$

(2) 归纳证 $M^{e(r)+j} \subseteq H^{r+1} + (\mathrm{ad}x)^j\cdot M^{e(r)}$，$j=1$ 时已成立.

j 成立下，$M^{e(r)+j+1} \subseteq [\underbrace{H^{r+1} + (\mathrm{ad}x)^j\cdot M^{e(r)}}, \underbrace{M}]$ $\subseteq H^r$

$$\subseteq [H^{r+1}, M] + [(\mathrm{ad}x)^j \underline{M^{e(r)}}, H] + (\mathrm{ad}x)^{j+1} M^{e(r)}$$

$$\subseteq H^{r+1} + [H^{r+1}, x] + (\mathrm{ad}x)^{j+1} M^{e(r)}$$

由 $[H^{r+1},x] = [[H^r,H],x] \subseteq [H^r,[H,x]] + [H,[H^r,x]]$

从而 $[H,x]\subseteq H$，归纳易证 $[H^{r+1},x]\subseteq H^{r+1}$，于是第2个归纳得证.

(3) 由 H 幂零性，$M^{e(r)+j}\subseteq H^{r+1} + (\mathrm{ad}x)^j\cdot M^{e(r)}$ 中，

j 充分大时，$(\mathrm{ad}x)^j = 0$，令 $e(r+1) = e(r)+j$ 为相应 j 值.

于是第一个归纳式得证. 由断言，命题之见 #

简记：① 取极大幂零，作成商 H 模 L/H

② 取 L/H 上不可约模 M/H，并得到 λ 为零表示.

③ 导出 $H\lhd M\leq L$，化归为验证 M 幂零性

④ "控制级数"，$M^{e(r)}\subseteq H^r$ 两步归纳得到.

note: $I \lhd L \Rightarrow I^r \lhd L$

归纳.

Pf: $[I^{r+1}, L] \subseteq [I^r, [I, L]] + [I, [I^r, L]] \subseteq [I^r, I] + [I, I^r] \subseteq I^{r+1}$

推论: L 为幂零 Lie 代数 $\Leftrightarrow$ ∃ L 基, s.t. $\mathrm{ad}\, x = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $\forall x \in L$.

Pf: $\Leftarrow$ 由 Engel's thm 立见

$\Rightarrow$: 由前一命题立得, 具体地.

L 幂零 $\Rightarrow$ 理想链 $L = L^1 \supseteq \cdots \supseteq L^n = 0$

链之间的任一子空间为 L 子理想

$\Rightarrow$ 扩充得到理想链 $L = I^m \supseteq \cdots \supseteq I^0 = 0$, $\dim I^r = r$.

取 $x_r \in I^r \setminus I^{r-1}$, $r = 1, \cdots, m$.

$\Rightarrow$ L 在 $\{x_i\}_{i=1}^m$ 下的伴随作用矩阵为所求形式.

即 $\forall x$, $\mathrm{ad}\, x (x_1, \cdots x_m) = (x_1, \cdots x_m) \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

5、判定命题:

① 对理想链 $L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots \supseteq L^n \supseteq \cdots$

$\forall$ L 上子空间 I, 若 $L^n \subseteq I \subseteq L^{n-1}$ $\Rightarrow$ $I \lhd L$

即 $\{L^n\}$ 理想链的任意加细, 可得逐级理想升链.

② 对理想链 $L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq L^{(n)} \supseteq \cdots$

$\forall$ L 上子空间 K, $L^{(n)} \subseteq K \subseteq L^{(n-1)}$ $\Rightarrow$ $K \leq L$

即 $\{L^{(n)}\}$ 理想链的任意加细, 可得逐级子代数升链.

③. L 为 $M_n(C)$ 上的一族上三角矩阵, $\forall M_m(C)$, $m < n$

有 $\rho: L \to M_m(C)$, $\tilde{\rho}: L \to M_m(C)$,

$\begin{pmatrix} A_m & * \\ & A_{n-m} \end{pmatrix} \mapsto A_m$ $\quad$ $\begin{pmatrix} A_{n-m} & * \\ & A_m \end{pmatrix} \mapsto A_m$

均为代数同态. 当 L 为 Lie 代数时, $\rho, \tilde{\rho}$ 为 Lie 同态

6、一些思考.

① 条件用在哪

(1). L 的任一表示 $\rho: L \to M_n(C)$ 中, $\rho(L)$ 可同时上三角化.

$\Leftrightarrow$ L上有递一的理想升链，即 $0=I^0\subseteq I^1\subseteq\cdots\subseteq I^n=L$, $\dim I^r=r$.

(2) L幂零 $\Rightarrow$ $\forall x\in L$, $\rho(x)$ 在V上根子空间为L模.

故由此性质，可推导V的权空间分解.

(3) Engel's Thm 中，没用到权空间分解性质.

(4) "可解 $\Rightarrow$ $\rho(L)$ 可同时上三角化"

用到可解模总存在权向量的性质.(类似单个矩阵上三角化,找特征向量)

"可解 $\Rightarrow$ 不可约模一维" 平移用到 $\dim L<\infty$.

"V总有不可约模","V总有不可分解子模"，均用到 $\dim V<\infty$

(5) 幂零+幂零 为幂零 可见 Engel's Thm 中,极大性用到 $\dim L<\infty$.

②. 存在与唯一性

(1). 根子空间分解，权空间分解 均是唯一的.

③ 有限与无限

(1) 可解的上三角化，幂零的类 Jordan 上三角化, Engel's Theom

均用到 $\dim L<\infty$.

公式：L为Lie代数，V为L模，$v\in V$, $x,y\in L$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

$\rho: L\to gl(V)$ 中，不引起混淆下，$\rho(x)$ 简记为 x.

则有 $$\underbrace{(\rho(y)-(\alpha+\beta)\cdot 1)^n}_{gl(V)}\cdot \underbrace{x\cdot v}_{mod} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \underbrace{(\mathrm{ad}\,y-\beta\cdot 1)^i x}_{Lie}\underbrace{(\rho(y)-\alpha\cdot 1)^{n-i}}_{gl(V)} v$$

Pf: $n=0$. 命题成立，归纳设 $n=r$ 时成立.

记 $x_i=(\mathrm{ad}\,y-\beta\cdot 1)^i x\in L$,

$$\Rightarrow (\rho(y)-(\alpha+\beta)\cdot 1)^{r+1}xv=(\rho(y)-(\alpha+\beta)\cdot 1)\cdot\sum_{i=0}^{r} C_r^i (\mathrm{ad}\,y-\beta\cdot 1)^i x\,(\rho(y)-\alpha\cdot 1)^{r-i}\cdot v$$

$$=(\rho(y)-(\alpha+\beta)\cdot 1)\cdot\sum_{i=0}^{n} C_r^i\,\rho(x_i)\cdot(\rho(y)-\alpha\cdot 1)^{r-i}\cdot v.$$

而 $(\rho(y)-(\alpha+\beta)\cdot 1)\rho(x_i)\overset{Lie}{=}\rho([yx_i])+\rho(x_i)\cdot\rho(y)-(\alpha+\beta)\rho(x_i)$

$= \rho((ady-\beta 1)x_i) + \rho(x_i)\cdot(\rho(y)-(\alpha+\beta)\cdot 1)$

$= \rho(x_{i+1}) + \rho(x_i)\cdot(\rho(y)-(\alpha+\beta)\cdot 1)$

note：归纳验证，从略，用到 $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^m$

公式用于推导 $[L_\lambda, L_\mu] \subseteq L_{\lambda+\mu}$

即 $(ad\,h - (\lambda+\mu)(h))^n [x,y] = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [(ad\,h-\lambda(h))^i x, (ad\,h-\mu(h))^{n-i} y]$

---

1. 可解表示

① 一维表示：$\rho: L \to L \Leftrightarrow \rho(L^2)=0$ ＋线性

② $[H,L] \subseteq I \subseteq H \Rightarrow I \lhd L$ ⇒ { $L \supseteq L^2 \supseteq \cdots \supseteq L^n \supseteq \cdots$ 均为子理想.
$[H,H] \subseteq K \subseteq H \Rightarrow K \leq L$ } $L \supseteq L^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq L^{(n)} \supseteq \cdots$ 均为子代数.

③ $H+K=L \Rightarrow L$子模 $=H$且K子模.

④ L可解，V不可约 $\Rightarrow \dim V = 1$

L可解 $\Rightarrow \rho(L)$可同时上三角，

$\begin{pmatrix} A_n & * \\ & A_m \end{pmatrix} \to A_n, A_m$ 均为 Lie 同态.（抹掉部分右上角仍同态）

⑤ $\forall V$, $\rho(L)$可同时上三角 $\Leftrightarrow$ L有逐一子理想链

2. 幂零表示

① L幂零，$\forall x \in L$, $\rho(x)$根子空间为L子模.

L幂零，V不可约 $\Rightarrow \rho(x)$同时分块 $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \lambda \end{pmatrix}$ 形

② L幂零 $\Rightarrow$ 权空间分解 $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$

③ Engel：幂零 $\Leftrightarrow \forall x$, $ad\,x$幂零.

3. V为L模，$v \in V$, $x,y \in L$,（L可以无限维），则有

$(y-(\alpha+\beta)\cdot 1)^n x v = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (ady-\beta\cdot 1)^i x \cdot (y-\alpha\cdot 1)^{n-i} v$

Q：Lie 代数中，可解与群可解如何类比.（是否落在同一范畴上?）

（研究对象性质的不同?）