Cpt3. Cartan子代数.

Cpt3.1 Cartan子代数存在性.

0、预处理:

① V为线性空间, $\dim V = n < \infty$,

则 $\forall x \in gl(V)$, $v \in V$, $\exists m$ s.t. $(x - \lambda\cdot 1)^m v = 0$

$\Leftrightarrow$ 对 n, $(x - \lambda\cdot 1)^n \cdot v = 0$.

②. 同样地, L为Lie代数, 且 $\dim L = n < \infty$,

则 $\forall x \in L$, $y \in L$, $\exists m$ s.t. $(\mathrm{ad}\, x - \lambda\cdot 1)^m y = 0$

$\Leftrightarrow$ 对 n, $(\mathrm{ad}\, x - \lambda\cdot 1)^n y = 0$.

特别地, $x \in L$ 幂零 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ad}_x{}^n = 0$.

即, 对 $\dim L, \dim V < \infty$ 情形, 根子空间中的 n 可固定下来.

1、正规化子

① H为L子代数, 令 $N(H) = \{x \in L \mid \mathrm{ad}\, x(H) \subseteq H\}$

并称 $N(H)$ 为 H 的正规化子.

② 性质: (1) $N(H) \leq L$

(2) $H \trianglelefteq N(H)$

(3) $H \trianglelefteq K \leq L \Rightarrow K \subseteq N(H)$

Pf. (1) $[[x,y],h] = [x,[y,h]] - [y,[x,h]] \in H \Rightarrow [N(H), N(H)] \subseteq N(H)$.

(2) 由 $[N(H), H] \subseteq H$ 易见.

(3) $[K, H] \subseteq H \Rightarrow K \subseteq N(H)$.

2. Cartan子代数

① 若 H 为 L 幂零子代数且 $H = N(H)$ $\Rightarrow$ 称 H 为 L 的 Cartan子代数.

② $\forall x \in L$, 记 $L_{0,x} = \{y \in L \mid \exists n, \text{ s.t. } \mathrm{ad}\, x^n \cdot y = 0\}$

称 $L_{0,x}$ 为 L 关于 x 的零成分.

③. 若 $\dim L_{0,x}$ 取到最小，则称 x 为正则的.

note: $x\in L_{0,x} \Rightarrow \dim L_{0,x}>0$.

note2: L 有正则元素，用到条件 $\dim L<\infty$.

3. 存在性定理

设 x 为 L 正则元，则 $H=L_{0,x}$ 为 L 的 cartan 子代数.

Pf: 分三步讨论：$H\leq L$, H 幂零, $N(H)=H$.

①. $\forall y,z\in H$. 归纳证 $(\mathrm{ad}\,x)^n[yz]=\sum_{i=0}^{n} C_n^i[(\mathrm{ad}x)^i y,(\mathrm{ad}x)^{n-i}z]$

$n=0$ 成立，n 成立时，$(\mathrm{ad}\,x)^{n+1}[yz]=\sum_{i=0}^{n} C_n^i\cdot \mathrm{ad}x([(\mathrm{ad}x)^i y,(\mathrm{ad}x)^{n-i}z])$

$=\sum_{i=0}^{n} C_n^i([[x,(\mathrm{ad}x)^i y],(\mathrm{ad}x)^{n-i}z]+[(\mathrm{ad}x)^i y,[x,(\mathrm{ad}x)^{n-i}z]])$

比较可得 $\left(\begin{aligned}&=\sum_{i=0}^{n} C_n^i([\mathrm{ad}x^{i+1}y,\mathrm{ad}x^{n-i}z]+[\mathrm{ad}x^i y,\mathrm{ad}x^{n-i+1}z])\\&=\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i[\mathrm{ad}x^i y,\mathrm{ad}x^{n+1-i}z]\end{aligned}\right.$

note: $C_{n+1}^m=\frac{n+1}{n-m+1}C_n^m$, $C_n^{m+1}=\frac{n-m}{m+1}C_n^m \Rightarrow C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^m$

$\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i[\mathrm{ad}x^{i+1}y,\mathrm{ad}x^{n-i}z]+\sum_{i=1}^{n} C_n^i\cdot[\mathrm{ad}x^i\cdot y,\mathrm{ad}x^{n-i+1}z]$

$=\sum_{i=1}^{n-1} C_n^{i+1}[\mathrm{ad}x^i y,\mathrm{ad}x^{n-i+1}z]$

(亦可由上一章最后一式直接得到)

于是，$n=2\dim L$ 时，$[\mathrm{ad}x^i y,\mathrm{ad}x^{n-i}z]=0 \Rightarrow \mathrm{ad}x^{2n}[y,z]=0$.

②. 设 $\dim H=l$, $H=\langle b_1,\cdots,b_l\rangle$

$\forall y=\sum_i t_i b_i\in H$. 由 Engel's Theorem. 仅须证 y 在 H 上幂零.

注意到 $\mathrm{ad}\,y: \begin{aligned}L&\to L\\H&\to H\end{aligned} \Rightarrow \mathrm{ad}y: L/H\to L/H$.

note: ady 不为 Lie 模同态，这里仅指线性映射.

note2: 设 L 有 H 扩充基 $L=\langle b_1,\cdots,b_l,\cdots b_n\rangle$

$\Rightarrow \mathrm{ad}y(b_1,\cdots b_l,\cdots,b_n)=(b_1,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}A_l & * \\ & A_{n-l}\end{pmatrix}$

其中分块上三角由 $\mathrm{ad}y(H)\subseteq H$ 得到.

取 H 补空间基 $\{b_{l+1},\cdots,b_n\}$ 作为 L/H 基的一组代表元

则 $ad\,y(\bar{b}_{l+1},\cdots,\bar{b}_n)=(\bar{b}_{l+1},\cdots,\bar{b}_n)\cdot A_{n-l}$

✿. 即, 上三角分块, 带来了不变子空间.

其上下分块的几何意义分别为不变子空间与相应商空间.

设 $\chi(t)$, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ 分别为 $ad\,y$ 在 L, H. L/H 上的特征多项式.

由分块可见 $\chi(t)=\chi_1(t)\cdot\chi_2(t)$.

且 $\chi(t)=\det(t\cdot 1-ad\,y)$

$=\det\cdot(t\cdot 1-\sum\lambda_i\,ad\,b_i)=\det(tE-\sum\lambda_i\cdot B_i)$

即 $\chi(t)$, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ 的系数为关于 $\{\lambda_i\}$ 的多项式.

设 $\chi_2(t)=d_0+d_1t+\cdots+d_{n-l}t^{n-l}$

$\because x\in H$, 考虑 $y=x$ 情形, 注意到 $H=L_{0,x}=\{z\in L\mid ad\,x^n z=0\}$

$\forall\ z+H\in L/H$, $ad\,y(z+H)=H\Rightarrow[y,z]\in H\Rightarrow ad\,x^{n+1}z=0$

$\Rightarrow z\in H$, 即 $z+H=H$. 故此时 $ad\,y$ 无零特征值.

因而 d_0 为 $\{\lambda_i\}$ 的多项式, 且不为零多项式.

设 $\chi_1(t)=t^m\cdot(c_0+c_1t+\cdots+c_{l-m}t^{l-m})$, c_0 不为零多项式.

其中 $m\le l=\deg\chi_1(t)=\dim H=\dim L_{0,x}$

于是 $\chi(t)=\chi_1(t)\cdot\chi_2(t)=t^m\cdot(c_0\cdot d_0+e_1t+\cdots+e_{n-m}t^{n-m})$

其中 $c_0\cdot d_0$ 不为零多项式. $\Rightarrow$ 其非零解对应的 y 张成 H.

$\Rightarrow$ 对这些 y, $\dim L_{0,y}=m\ge l=\dim L_{0,x}$

$\Rightarrow m=l$, $\chi_1(t)=t^l$

$\Rightarrow(ad\,y)^l|_H=0$, 即 y 为 H 上幂零元. #

③. $z\in N(H)\Rightarrow[x,z]\in H\xRightarrow{H=L_{0,x}\text{定义}}ad\,x^n[xz]=0\xRightarrow{ad\,x^{n+1}z=0}z\in H$

于是 $H=N(H)$.

故 H 为 L 的 cartan 子代数. 问题证毕.

note: $\forall y\in L$, 仍有 $L_{0,y}\le L$ 且 $N(L_{0,y})=L_{0,y}$.

即仅幂零性中，用到 $x\in L$ 的子列性。 构成升集！

note2: $d_0(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)\neq 0 \Rightarrow$ 其非零点 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)$ 张成 $\mathbb{C}^l$.

H-组基幂零 $\Rightarrow$ H 幂零.

② 简化：目标：证 $\forall y\in H$ 在 H 上幂零

方法：考虑 $ad\,y$ 的特征多项式

y 在 L 上 $\chi(t)$，导出 $\dim L_{0,y}$ 信息.

y 在 H 上 $\chi_1(t) \Rightarrow$ 用于证明 y 在 H 上幂零

y 在 L/H 上 $\chi_2(t) \Rightarrow$ 找出 H 上一组幂零基.

Cpt3.2. 导子与自同构.

1. 线性映射 $\delta: L\to L$ 满足 $\delta[x,y]=[\delta x,y]+[x,\delta y]$, $\forall x,y\in L$

则称 δ 为 L 的导子.

特别地，$\forall x\in L$，$ad\,x$ 为 L 导子.

pf: $ad\,x\,[y,z] = [x,[y,z]] = [[x,y]z] + [y,[x,z]]$

note: 化简 $[x[yz]]$ 可有两种角度.

① 看成 $ad_{[yz]}$ 对 x 作用. 即 $ad\,y\cdot ad\,z - ad_z\cdot ad\,y$.

② 看成导子 $ad\,x$ 对 $[yz]$ 作用

2. $Aut\,L=\{\theta: L\to L \mid \theta$ 为 L 的 Lie 自同构$\}$

则 $Aut\,L$ 关于复合运算作成 L 的 Lie 自同构群

recall. 线性变换中，函数 $f(x)$ 在 A 的特征值处有 n 阶导数时，

可通过 Jordan 块定义 $f(A)$.

3. δ 为 L 的幂零导子，则 e^{δ} 为 L 的自同构.

pf: δ 幂零 $\Rightarrow \exists n,\ \delta^n=0 \Rightarrow e^{\delta}=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\delta^r}{r!}$

于是 e^{δ} 为线性映射.

归纳易证. $\delta^r[xy] = \sum_{i=0}^{r} C_r^i[\delta^i x, \delta^{r-i}y]$ (与前面 C_n^m 讨论方法一致)

于是 $e^{\delta}\cdot[x,y]=\sum_{r=0}\frac{1}{r!}\delta^r[x,y]$

$$=\sum_{r=0}\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i!(r-i)!}\cdot[\delta^i x,\delta^{r-i}y]$$

$$=\sum_{i=0}\sum_{j=0}\frac{1}{i!j!}\cdot[\delta^i x,\delta^j y]$$

$$=[\sum_{i=0}\frac{1}{i!}\delta^i x,\sum_{j=0}\frac{1}{j!}\delta^j y]=[e^{\delta}x,e^{\delta}y]$$

故 e^{δ} 为 Lie 同态。同理可证 $e^{-\delta}$ 为 Lie 同态。

于是 $e^{\delta}\cdot e^{-\delta}=1\Rightarrow e^{\delta}$ 为 Lie 同构。

note: 证明中，由于 δ 为幂零元，Σ 均为有限和。

Q: δ 非幂零时，e^{δ} 仍有意义。此时不知是否仍成立！

令 $\mathrm{Inn}\,L=\langle e^{x}\mid x\in L$ 且 x 为幂零元$\rangle$ 称为 L 的内自同构群

4. $\mathrm{Inn}\,L\trianglelefteq \mathrm{Aut}\,L$

pf: $x\in L$ 幂零，θ 为导子，只须证 $\theta\cdot e^{\mathrm{ad}x}\theta^{-1}\in \mathrm{Inn}\,L$

$$\because\ \underline{\theta\,\mathrm{ad}x\,\theta^{-1}(y)}\overset{\mathrm{ad}x}{=}\theta[x,\theta^{-1}(y)]\overset{\theta\text{导子}}{=}[\theta x,y]\overset{\mathrm{ad}\theta x}{=}\mathrm{ad}_{\theta x}(y)$$

$$\Rightarrow\ \theta\,\mathrm{ad}x\,\theta^{-1}=\mathrm{ad}_{\theta x}\in \mathrm{Inn}\,L\ .\ \#$$

对 $M_1,M_2\le L$，称 M_1 与 M_2 共轭，若 $\exists\,\theta\in\mathrm{Inn}\,L$. s.t. $\theta(M_1)=M_2$.

我们希望证明，L 的任二 Cartan 子代数共轭。

为此，需引入一些代数几何的方法。

Opt 3.3 代数几何的方法

1. 设 H 为 L 的 Cartan 子代数，L 视为 H 模，有权空间分解

$L=\bigoplus_{\lambda}L_{\lambda}$，其中 $\lambda: H\to \mathbb{C}$ 为 H 的一维表示，也即 H 模 L 的权。

$L_{\lambda}=\{x\in L\mid (\mathrm{ad}\,h-\lambda(h)\cdot 1)^N x=0,\ \forall h\in H\}$，$N=\dim L$.

由 H 幂零 $\Rightarrow H\subseteq L_0$

note: 我们还希望 $L_0\subseteq H$，于是 $L=H\oplus L_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus L_{\lambda_r}$

（这里 L_0 是 H 模下得到的，取不同 Cartan H，必将得到不同权分解）

2. 断言 $\forall \lambda, \mu$ 为 H 一维表示，有 $[L_\lambda, L_\mu] \subseteq L_{\lambda+\mu}$.

Pf: 取 $x \in L_\lambda$, $y \in L_\mu$

即证 $\exists n$, $(\mathrm{ad}\,h - (\lambda+\mu)(h))^n [x\,y] = 0$, $\forall h \in H$

由前述公式,

$$(\mathrm{ad}\,h - (\lambda+\mu)(h))^n [x, y] = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [(\mathrm{ad}\,h - \lambda(h))^i x, (\mathrm{ad}\,h - \mu(h))^{n-i} y]$$

n 充分大时，有 $(\mathrm{ad}\,h - \lambda(h))^i x = 0$ 或 $(\mathrm{ad}\,h - \mu(h))^{n-i} y = 0$. 证毕.

推论: $L = L_0 \oplus (\bigoplus_{\lambda \neq 0} L_\lambda)$ 中, $\forall x \in L_\lambda$, 有 $\mathrm{ad}\,x$ 幂零

Pf: 只须证, $\forall y \in L_\mu$, $\exists n$, $(\mathrm{ad}\,x)^n y = 0$.

由于 $(\mathrm{ad}\,x)^n y \in L_{\mu+n\lambda}$, 而 L 有限维, 故 n 充分大时 $L_{\mu+n\lambda} = 0$. #

3. $L = L_{\lambda_0} \oplus L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$, 其中 $\lambda_0 = 0$.

取 L 一组基 $\{b_{ij} \mid 0 \le i \le r\}$ s.t. $\{b_{ij}\}$ 为 L_{λ_i} 的一组基.

$\forall x \in L$, x 有唯一分解 $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_r$, $x_i \in L_{\lambda_i}$, $i = 0, 1, \cdots, r$

令 $f: L \to L$

$$x \mapsto e^{\mathrm{ad}\,x_1} \cdots e^{\mathrm{ad}\,x_r}(x_0)$$

则 $f: (\sum \lambda_{ij} b_{ij}) \mapsto \sum \mu_{ij} b_{ij}$, 其中 μ_{ij} 为关于 $\{\lambda_{ij}\}$ 的多项式.

Pf: 由 exp 性质，对 $x_i = \sum_j \lambda_{ij} b_{ij}$, $e^{\mathrm{ad}\,x_i}$ 由 $e^{\lambda_{ij} b_{ij}}$ 依次复合得到

而 $e^{\lambda_{ij} b_{ij}} x_0 = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \cdot \mathrm{ad}(\lambda_{ij} b_{ij})^k (x_0)$

其中 $\mathrm{ad}\,b_{ij}(x_0) = [b_{ij}, \sum_{k=0} \lambda_{0k} b_{0k}]$ 为关于 $\{\lambda_{ij}\}$ 多项式. #

(e 的多项式性须未证.)

4. 记 $\mu_{ij} = f_{ij}(\lambda_{kl})$, 令 $J(f) = \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \lambda_{kl}}\right)$ 为 $\dim L$ 阶矩阵

则 $\det J(f) \in \mathbb{C}[\lambda_{kl}]$ 且 $\det J(f)$ 不为零多项式.

方法: 考虑特殊元 $h \in H$, s.t. $\det J(f)_h \neq 0$. $J(f)_h$ 上三角化且对角非0.

5. $\{f_{ij}\}$ 为代数无关的,

即 非零多项式 $F(x_{ij})$ s.t. $F(f_{ij}) = 0$, 则有 $F = 0$.

6. 令 $B=\mathbb{C}[f_{ij}]$ 为多项式生成的环，$A=\mathbb{C}[x_{ij}]$

令同态 $\theta: B\to A$，则 θ 为单同态

$f_{ij}\mapsto f_{ij}(\lambda_{kl})$

于是 B 可视为 A 的子环。

未证。

7. $B\subseteq A$ 为含幺点幺的整环且 A 由 B 有限生成。(6 中情形)

令 p 为 A 上非零元，则 $\exists$ B 上非零元 q，

s.t. 任一同态 $\varphi: B\to \mathbb{C}$ 且 $\varphi(q)\neq 0$，φ 可延拓到 $\psi: A\to\mathbb{C}$，$\psi(p)\neq 0$。

设 $d=\dim L$，$f: \mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$ 为多项式函数

$\sum\lambda_{ij}b_{ij}\mapsto\sum f_{ij}(\lambda_{kl})\,b_{ij}$

8. 推论：记 $V=\mathbb{C}^d$，$\forall$ 多项式 $p\in\mathbb{C}[x_{ij}]$，记 $V_p=\{v\in V \mid p(v)\neq 0\}$，

则 $p\neq 0 \Rightarrow \exists$ 非零多项式 $q\in\mathbb{C}[x_{ij}]$，s.t. $f(V_p)\supseteq V_q$

Cpt 3.4. Cartan子代数的共轭性.

0. 我们将书上的命题证明拆解为若干引理. 这些引理本身也是有一定的理论价值.

1. 若干 lemma. 和记记.

① $H \le L$ 且 L 为 H 模, 于是 L/H 可作为 H 模.

且有 $H \lhd L \iff H$ 在 L/H 上为零作用.

②. H 在 L 上幂零, 即 $\forall h \in H$, $(ad\,h)^n(L) = 0$, $n = \dim L$

则 L 作为 H 模, 只有零权, 即 L 关于 H 的权空间分解为 $L = L_0$

Pf: 设 L_λ 为 λ 的权空间, 即 $L_\lambda = \{x \in L \mid (ad\,h - \lambda(h))^n x = 0, \forall h \in H\}$

取 L_λ 不可约子模中元素 x, 则 $\forall h \in H$, 有.

$[h\,x] = \lambda(h)x \Rightarrow [ad\,h^n, x] = \lambda^n(h) \cdot x = 0 \Rightarrow \lambda(h) = 0$, 即 $\lambda \equiv 0$.

特别地, L/H 不可约 $\Rightarrow H$ 对 L/H 仅零作用 $\Rightarrow H \lhd L$

note: H 为 L 的幂零子代数 $\not\Rightarrow$ H 在 L 上幂零.

③ H 为 L 的 Cartan 子代数, L 权空间分解 $L = L_0 \oplus L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$, 中有 $H = L_0$. (如未说明, 总假定 $n = \dim L$) (做工作题)

Pf: $L_0 = \{x \in L \mid \forall h \in H, (ad\,h)^n x = 0\}$

H 幂零 $\Rightarrow H \subseteq L_0$, 且 H 在 L_0 上幂零

若 $H \ne L_0$, 设 M/H 为 L_0/H 的不可约子模,

由 ②, 有 $H \lhd M \Rightarrow [M, H] \subseteq H \Rightarrow M \subseteq N(H) \subseteq H \Rightarrow H = M$, 矛.

④. 设 $\{b_{ij}\}$ 为 L 一组基, 则给出函数 $f: L \to \mathbb{C}$ 等价于给出

多项式函数 $\tilde{f}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $\quad$, $\tilde{f} \in \mathbb{C}[\lambda_{ij}]$

$(\lambda_{ij}) \mapsto f(\sum \lambda_{ij} b_{ij})$

⑤. L 上正则点集的构造方法.

解: $\forall y = \sum \lambda_{ij} b_{ij} \in L$, $\chi(y) = \det(t \cdot 1 - ad\,y) = \det(t \cdot 1 - \sum \lambda_{ij}\, ad\, b_{ij})$

$= \det(tE - \sum \lambda_{ij} B_{ij})$

$= t^n + \mu_{n-1}(y)t^{n-1} + \cdots + \mu_0(y)$，记 $\mu_n(y)=1$

其中 $\mu_i(y)$ 可视为 $L\to C$ 函数 也可视为关于 $\{\lambda_j\}$ 多项式函数.

则 $\exists !\, k$, $0\le k\le n$, s.t. $\mu_k(y)\not\equiv 0$, $\mu_l(y)\equiv 0$, $\forall\, l<k$.

于是, $R=\{y\in L \mid \mu_k(y)\neq 0\}$ 为 L 的正则元集

(6) H 为 L 的 Cartan 子代数 $\Rightarrow$ L 有权空间分解 $L = H\oplus L_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus L_{\lambda_r}$

$\forall x\in L$, $x = x_0+x_1+\cdots+x_r$, 其中 $x_i\in L_{\lambda_i}$, $x_0\in H$, 记 $\bar{x} = x_1+\cdots+x_r$.

(1) 令 $f: L\to L$, $x\mapsto e^{\mathrm{ad}\,x_1}\cdots e^{\mathrm{ad}\,x_r}(x_0)$, 则 $f(x)$ 为 x_0 的同构像.

即, f 将 L 上点 x 打到与 x_0 同构的点上.

(2) 令多项式函数 $p: L\to C$, $x\mapsto \lambda_1(x_0)\cdots\lambda_r(x_0)$, 则 $p\not\equiv 0$

记 $L_p=\{x\in L \mid p(x)\neq 0\}$, 由上节讨论, $\exists\, q: L\to C$ 非零, s.t. $L_q\subseteq f(L_p)$

pf: (2) $p(x)=0 \Leftrightarrow \lambda_i(x)=0$, $\forall i\in\{1,\dots,r\}$

而 λ_i 为 H 一维表示 且 $\lambda_i\neq 0$ $\Rightarrow$ $H_i:=\{x\in H \mid \lambda_i(x)=0\}$ 为 H 真子空间

$\therefore$ $\bigcup_{i=1}^r H_i$ 为 H 真子集 $\Rightarrow$ $L_p=\left(\bigcup_{i=1}^r H_i\right)^c$ 不为空.

note: $e^{\delta_1+\delta_2}=e^{\delta_1}(e^{\delta_2})$ 关于线性变换的函数性质来讨论

note2: 上一节代数几何的讨论, 只为构造这个命题.

(7). $\mathrm{ad}: L\to gl(L)$, $x\mapsto \mathrm{ad}\,x$ 为 L 上的同态. $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}L$ 为 $gl(L)$ 子代数.

对 L 上任一同态 θ, $\exists$ 同态 $\tilde{\theta}: \mathrm{ad}L\to \mathrm{ad}(\theta L)$, $\mathrm{ad}\,x\mapsto \mathrm{ad}\,\theta x$

s.t.
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathrm{ad}L \arrow[d, "\tilde{\theta}"] \\ \theta(L) \arrow[r, "\mathrm{ad}"] & \mathrm{ad}\,\theta(L) \end{tikzcd}$$
为交换图.

pf: 由定义, 交换性显然. 只须证 $\tilde{\theta}$ 为 Lie 同态.

$ad\,x = ad\,y \Rightarrow [x,z]=[y,z],\ \forall z\in L$

$\Rightarrow \theta([x,z]) = \theta([y,z]),\ \forall z\in L$

$\Rightarrow [\theta x, \theta z] = [\theta y, \theta z],\ \forall z\in L$

$\Rightarrow ad\,\theta x = ad\,\theta y \Rightarrow$ 良定义.

θ线性性 $\Rightarrow \tilde{\theta}$线性性.

$[ad\,x, ad\,y] = ad_{[xy]} \mapsto ad_{\theta[xy]} = ad_{[\theta x, \theta y]} = [ad\,\theta x, ad\,\theta y]$. #

特别地, θ为同构时, $\tilde{\theta}$亦同构. 于是上图为同构交换图.

(8). 推论: θ为L的自同构, 则x为L正则点 $\Leftrightarrow$ $\theta(x)$为L正则点.

Pf: $ad\,x$关于基$\{b_i\}$的矩阵与$ad\,\theta x$关于基$\{\theta(b_i)\}$的矩阵相同

$\Rightarrow ad\,x$与$ad\,\theta x$特征多项式相同

$\Rightarrow \dim L_{0,x} = \dim L_{0,\theta x}$. #

note: 同构交换图的作用在于, 把上图所有关系, 平移到下图上.

2. H为L Cartan子代数, 则$\exists$ L上正则点x, s.t. $H = L_{0,x}$

pf: ① L关于H有权空间分解 $L = L_0 \oplus L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$

对 $f: L \to L$, $x \mapsto e^{ad\,\tilde{x}}(x_0)$; 取函数: $P: L \to C$, $x \mapsto \lambda_1(x_0)\cdots\lambda_r(x_0)$

由引理知, $P\neq 0$, 且$\exists$函数$q\neq 0$, s.t. $L_q \subseteq f(L_p)$

② $\forall y\in L$, 设 $\chi(y) = t^n + \mu_{n-1}(y)t^{n-1} + \cdots + \mu_0(y)$

$\Rightarrow \exists!\, k$, $0\le k\le n$, s.t. $\mu_k(y)\not\equiv 0$, $\mu_l(y)\equiv 0$, $\forall l<k$.

$\Rightarrow R = \{y\in L \mid \mu_k(y)\neq 0\}$为$L$正则点集

③ $\mu_k \not\equiv 0$, $q\not\equiv 0 \Rightarrow \mu_k\cdot q \not\equiv 0 \Rightarrow \exists y\in L$, s.t. $\mu_k(y)\cdot q(y)\neq 0$.

于是 $y\in R\cap L_q \subseteq R\cap f(L_p)$

$\Rightarrow y$正则 且$\exists x\in L_p$, s.t. $f(x)=y$

也即 $e^{ad\,x_1}\cdots e^{ad\,x_r}(x_0) = y \Rightarrow x_0$与$y$共轭. $\Rightarrow x_0$正则

④ $x_0\in H$ 且 H幂零 $\Rightarrow H \subseteq L_{0,x_0} = \{x\in L \mid (ad\,x_0)^n(x)=0\}$ (x_0在H上幂零)

又 $x\in L_p \Rightarrow p(x)\neq 0$

$\Rightarrow \lambda_i(x_0)\neq 0,\ i=1,\cdots,r$

$\Rightarrow \forall v\in L_{\lambda_i},\ 0\neq(\operatorname{ad}x_0)^n v\in L_{\lambda_i}$

$\Rightarrow L_{0,x_0}\subseteq H$ #

简证：目的：找 H 中正则元 x_0，从而证 $H=L_{0,x_0}$.

① 注意到 $\forall x_0\in H$，x_0 在 H 上幂零 $\Rightarrow H\subseteq L_{0,x_0}$

故只须使 $L_{0,x_0}\subseteq H$

② 对 $\forall v=v_0+v_1+\cdots+v_r$，$(\operatorname{ad}x_0)^n(v_0+\cdots+v_r)=v_0^{(n)}+v_1^{(n)}+\cdots+v_r^{(n)}$

其中 $v_i^{(n)}=0 \Leftrightarrow \lambda_i(x_0)=0$（$x_0$ 在 L_{λ_i} 上为某Jordan块作用）

于是 $\{x_0\in H \mid L_{0,x_0}\subseteq H\}=\{x_0\in H\mid \lambda_i(x_0)\neq 0,\ \forall i=1,\cdots,r\}$

即 $L_{0,x_0}\subseteq H \Leftrightarrow \lambda_1(x_0)\cdots\lambda_r(x_0)\neq 0$.

③. 于是构造 p：$x\mapsto \lambda_1(x_0)\cdots\lambda_r(x_0)$，s.t. $L_{0,x_0}\subseteq H \Leftrightarrow x\in L_p$

因为只须证 L_p 上(任)一点 x 的某部 x_0 正则.

④ 利用同构性，构造 f，s.t. x 的某部 x_0 正则 $\Leftrightarrow f(x)$ 正则

于是只须证 $f(L_p)\cap R$ 非空，R 为正则集

⑤. 由代数几何方法，得到 $L_q\subseteq f(L_p)$

此时，$R=\{y\in L \mid \mu_k(y)\neq 0\}$

于是找 q：μ_k 非零点，即证.

注：①-⑤ 是完整进行的，即命题逐步等价化归，最后转为代几问题.

指论：①. $\forall x_0\in H$，$H\subseteq L_{0,x_0}$.

②. H 为Cartan子代数，$x_0\in H$，则 x_0 正则 $\Leftrightarrow L_{0,x_0}\subseteq H$

③. 令 p：$L\to \mathbb{C}$，$x\mapsto \lambda_1(x_0)\cdots\lambda_r(x_0)$，则 $x_0\in H$ 正则 $\Leftrightarrow x\in L_p$

④. 令 f：$L\to L$，$x\mapsto e^{\operatorname{ad}x_1}\circ\cdots\circ e^{\operatorname{ad}x_r}(x_0)$，则 x_0 正则 $\Leftrightarrow f(x)$ 正则

⑤. 正则点集 $R=\{x\in L \mid \mu_k(x)=0\}$.

☆. 代几引理中，用到 f 性质，因而上一节整一节在研究 f.

另外：H 为 L cartan子代数 $\Rightarrow \forall L$ 子代数 M，s.t. $H \subseteq M \subseteq L$

有 H 为 M 的 cartan子代数.

3. L 的 任二 Cartan子代数 共轭

pf：设 H, H' 为 L 的两个 cartan子代数.

L 在 H 下，权空间分解 $L = H \oplus L_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_r}$

$\Rightarrow$ 定义 函数：$f: L \to L$，$p: L \to \mathbb{C}$.

s.t. $f(L_p)$ 为 H 中正则点集，且 $\exists\, q: L \to \mathbb{C}$. s.t. $L_q \subseteq f(L_p)$

设 $\chi(y) = \det(1 \cdot t - \mathrm{ad}\,y) = t^n + \mu_{n-1}(y) t^{n-1} + \cdots + \mu_0(y)$

$\Rightarrow \exists !\, k$，s.t. $R = \{x \in L \mid \mu_k(x) \neq 0\}$ 为 L 上正则点集.

类似地，对 H'，得到函数 f', p'，以及 q'，s.t. $L_{q'} \subseteq f(L_{p'})$

$\mu_k \cdot q' \cdot q \neq 0 \Rightarrow \exists\, z \in L$ s.t. $\mu_k(z) \cdot q'(z) \cdot q(z) \neq 0$.

$\Rightarrow z$ 正则，且 $\exists\, x \in L_p$，$x' \in L_{p'}$，s.t. $f(x) = f'(x') = z$

对分解 $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_r$，$x' = x_0' + x_1' + \cdots + x_r'$

有 $e^{\mathrm{ad}x_1} \circ \cdots \circ e^{\mathrm{ad}x_r}(x_0) = f(x) = f'(x') = e^{\mathrm{ad}x_1'} \circ \cdots \circ e^{\mathrm{ad}x_r'}(x_0')$

$\Rightarrow x_0$ 与 x_0' 共轭，且 $H = L_{0,x_0}$，$H' = L_{0,x_0'}$ $\Rightarrow$ H 与 H' 共轭.

note：重新用上一命题的 L_{0,x_0} 构造，并使 x_0 与 x_0' 有相同共轭元.

最后，称 $\dim H$ 为 L 的阶

4.（补充命题）关于 cartan子代数

①. 若 L 幂零，则 L 的 cartan子代数为 L 本身

pf：设 H 为 L cartan子代数

L 幂零 $\Rightarrow$ H 在 L 上幂零，

$\Rightarrow$ L 关于 H 权空间分解仅有零权.

又 $\because$ Cartan 分解中，$H = L_0$ $\Rightarrow$ $H = L$.

②. H 为 L 的 cartan子代数 $\Rightarrow$ H 为 L 的极大幂零子代数.

pf：设 $H \subseteq K \subseteq L$，且 $K^n = 0$.

$H \subseteq N_K(H) \subseteq N_L(H) \subseteq H \Rightarrow N_K(H) = H$

$\Rightarrow$ H 为 K Cartan 子代数.

又 $\because$ K 幂零 $\Rightarrow$ $H = K$.

note: 反之不然，即极大幂零子代数未必为 Cartan 子代数.

例①

Every Cartan subalgebra of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ is a maximal nilpotent subalgebra of $\mathfrak{g}$. However, a maximal nilpotent subalgebra of $\mathfrak{g}$ doesn't have to be a Cartan subalgebra. For instance, if $\mathfrak{g}$ is the Lie algebra of all endomorphisms of k^2 with $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ and if $\mathfrak{h}$ is the subalgebra of all endomorphisms f of the form $f(x, y) = (\lambda y, 0)$, then $\mathfrak{h}$ is a maximal nilpotent subalgebra of $\mathfrak{g}$, but not a Cartan subalgebra.

例②.

Consider the special linear algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ and let $\mathfrak{n}_2 \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ be the subalgebra of strictly upper triangular matrices. Clearly $\mathfrak{n}_2$ is not Cartan, since it is normalized by elements of the type $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$ which don't lie in $\mathfrak{n}_2$. I would like to show that $\mathfrak{n}_2$ is maximal nilpotent. Clearly it is nilpotent (even commutative). It remains to show that it is maximal. If i am not wrong the normalizer of $\mathfrak{n}_2$ in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ (that i indicate with $N_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})}(\mathfrak{n}_2)$) is $\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, where $\mathfrak{b}_2$ is the subalgebra of $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{F})$ of upper triangular matrices. If there is another nilpotent subalgebra $\mathfrak{n}_2 \subsetneq \mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, then i can find an element $x \in \mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{h}$ and $x \notin \mathfrak{n}_2$, since $\mathfrak{n}_2 \subsetneq N_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{n}_2) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{sl}_2 \cap \mathfrak{b}_2$. This element will have two distinct eigenvalues (if $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$). Can i say that the adjoint morphism $ad\ x\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ is not nilpotent? If it is so, i can conclude by Engel's theorem that $\mathfrak{h}$ is not nilpotent, getting a contradiction. If what i claim is not true, how to show that $\mathfrak{n}_2$ is maximal?