Cpt4. Cartan 分解

Cpt4.1 一些根空间性质

1. H 为 L cartan 子代数 $\Rightarrow$ L 有分解 $L = H \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha)$

   其中 $L_\alpha = \{x \in L \mid (\operatorname{ad} h - \alpha(h)\cdot 1)^n x = 0\}$，$\alpha$ 为 H 的一维表示

   称其为 L 的 cartan 分解，并记 L_α 为 α 的根空间

2. 基本性质.

   ①. $\forall \lambda, \mu$ 为 H 一维表示，有 $[L_\lambda, L_\mu] \subseteq L_{\lambda+\mu}$.

   note: 结论对任意幂零子代数成立.

   ②. $\forall \alpha, \beta \in \Phi$，有 $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$，若 $\alpha+\beta \in \Phi$

   $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq H$，若 $\alpha = -\beta$

   $[L_\alpha, L_\beta] = 0$，若 $\alpha+\beta \neq 0$ 且 $\alpha+\beta \notin \Phi$.

3. $\forall \alpha \in \Phi$，考虑 $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \subseteq H$，

   对 $\forall \beta \in \Phi$，$\exists\, r(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}$，s.t. $\beta = r\alpha \big|_{[L_\alpha, L_{-\alpha}]}$. $\Big) \Rightarrow \underset{\text{作为整体存在}}{[L_\alpha, L_{-\alpha}]}$

Pf：考虑 $i\alpha+\beta : H \to \mathbb{C}$

$\beta \in \Phi$ 且 $|\Phi| < \infty \Rightarrow \exists\, p, q \geq 0$，s.t. $i\alpha+\beta \in \Phi$，$-p \leq i \leq q$

$i\alpha+\beta \notin \Phi$，$i = -p-1$ 或 $q+1$

令 $M = \bigoplus_{i=-p}^{q} L_{i\alpha+\beta}$ 为 L 子模.

对 $\forall\, y \in L_\alpha$, $z \in L_{-\alpha}$，$\operatorname{ad} y(M) \subseteq M$，$\operatorname{ad} z(M) \subseteq M$

$\Rightarrow M$ 为 $\operatorname{ad} y$, $\operatorname{ad} z$ 不变子空间.

$\Rightarrow$ 对 $x = [y, z] \in H$，M 亦为 $\operatorname{ad} x$ 不变子空间

$\Rightarrow \operatorname{tr}_M \operatorname{ad} x = \operatorname{tr}_M(\operatorname{ad} y \operatorname{ad} z - \operatorname{ad} z \operatorname{ad} y) = 0$

又 $x \in H \Rightarrow L_{i\alpha+\beta}$ 为 $\operatorname{ad} x$ 不变子空间

且 $\operatorname{ad} x$ 在某组基下矩阵为 $\begin{pmatrix} (i\alpha+\beta)(x) & & * \\ & \ddots & \\ & & (i\alpha+\beta)(x) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow tr_M\, ad\,x = \sum_{i=-p}^{q} tr_{L_{i\alpha+\beta}}\, ad\,x = \sum_{i=-p}^{q} \dim L_{i\alpha+\beta}\cdot(i\alpha+\beta)(x)$

$\Rightarrow \sum_{i=-p}^{q} i \dim L_{i\alpha+\beta}\cdot\alpha(x) + \sum_{i=-p}^{q} \dim L_{i\alpha+\beta}\,\beta(x) = 0$，其中 $\dim L_{i\alpha+\beta} > 0$.

$\Rightarrow \beta(x) = \dfrac{-\sum_{i=-p}^{q} i\cdot \dim L_{i\alpha+\beta}}{\sum_{i=-p}^{q} \dim L_{i\alpha+\beta}}\cdot \alpha(x)$

于是，$\forall\beta$，β 在 $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ 上作用可转为 α 在 $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ 上作用.

note：$r(\alpha,\beta)\le 0$. 当且仅当 $\beta\pm\alpha\notin\Phi$ 时，取 0.

note2：V 为 L 模（任意 L 模）. $x=[y,z]$

若 $U\le V$ 为 $ad\,y$，$ad\,z$ 不变子空间.

则 U 亦为 x 不变子空间，$tr_U\, ad\,x = 0$.

特别地，总有 $tr_V\, ad\,x=0$.（结论对一般 $ad\,x$ 不变子空间不成立）

思路 $x=[y,z]$，构造 $ad\,y$，$ad\,z$ 不变子空间 M，从中 $tr_M\, ad\,x$ 导出 α,β 关系.

Cpt 4.2. Killing 型.

1. Killing 型.

令 $\langle\,,\rangle: L\times L \to \mathbb{C}$

$(x,y) \mapsto tr_L(ad\,x\cdot ad\,y)$.

则称 $\langle\,,\rangle$ 为 L 的 Killing 型.

note：对伴随表示 $ad: L\to gl(L)$，右式为矩阵 Lie 代数.

$x \mapsto ad\,x$

于是，用右边矩阵的迹内积，定义 L 上 Killing 型

由于 ad 未必单射，Killing 型较内积少了性质 $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$

2. 基本性质

①. $\langle x,y\rangle$ 满足双线性，对称性，不变性.

不变性. $\langle [xy], z\rangle = \langle x, [yz]\rangle$

note：由矩阵相关性质容易导出.

不变性中，只要保持 x,y,z 正序，Lie 括号位置随意.

② $I \lhd L \Rightarrow \langle x,y\rangle_I = \langle x,y\rangle_L$,

即L的Killing型限制在理想I上等于I的Killing型

Pf: $I \lhd L \Rightarrow I$ 为L的子L模(伴随模)

$\Rightarrow$ 可从I一组基扩充得L. 记 $m=\dim I$, $n=\dim L$

s.t. ad(L)中矩阵形如 $\begin{pmatrix} A_m & * \\ & O_{n-m} \end{pmatrix}$

由分块乘法立知, $\langle x,y\rangle_I = \langle x,y\rangle_L$.

对L任一子空间M, 记 $M^\perp = \{x \in L \mid \langle x,m\rangle = 0, \forall m \in M\}$

则 $M^\perp$ 为L的子空间, 并称为M的垂空间.

③ 性质: $I \lhd L \Rightarrow I^\perp \lhd L$

Pf: $\forall x \in I^\perp$, $y \in L$, 即证 $[xy] \in I^\perp$

对 $\forall z \in I$, 有 $\langle z,[x,y]\rangle = \langle [z,x],y\rangle = 0 \Rightarrow [xy] \in I^\perp$ #

特别地, $L^\perp \lhd L$.

3. 非退化与自零

① $L^\perp = 0 \Leftrightarrow x \in L$ s.t. $\forall y \in L$, 有 $\langle x,y\rangle = 0$, 则 $x=0$

$\Leftrightarrow$ $x \neq 0$, 则 $\exists y \in L$, s.t. $\langle x,y\rangle \neq 0$

此时, 称L的Killing型非退化,

② $L^\perp = L \Leftrightarrow \forall x,y \in L$, $\langle x,y\rangle = 0$

此时, 称L的Killing型为自零的.(identically zero)

4. $L \neq 0$ 且 $L^2 = L$ 设H为L的cartan子代数,

则 $\exists x \in H$ s.t. $\langle x,x\rangle \neq 0$. (!!, 证明不平凡, $\lambda(x)$ 未必为实数)

Pf: 设L在H下cartan分解为 $L = \bigoplus_\lambda L_\lambda$ 参见Carter P81存证明.

$\Rightarrow L^2 = [\bigoplus_\lambda L_\lambda, \bigoplus_\lambda L_\lambda] = \sum_{\lambda,\mu} [L_\lambda, L_\mu] = \sum_{\lambda,\mu} L_{\lambda+\mu}$

由 $L = L_0 \oplus (\sum_{\lambda \neq 0} L_\lambda)$, $L^2 = L \Rightarrow L_0 = \sum_\lambda [L_\lambda, L_{-\lambda}] = [H,H] + \sum_{\alpha \in \Phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}]$

H幂零, $L^2 = L \Rightarrow H \neq L \Rightarrow$ L作为H模的权集 $|\Phi| \neq 0$

取 $\beta \in \Phi$, 由 $\beta \neq 0$ 及 $\beta([H,H]) = 0 \Rightarrow \beta(\sum_{\alpha \in \Phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}]) \neq 0$.

$\Rightarrow \exists \alpha \in \Phi,\ \beta([L_\alpha, L_{-\alpha}]) \neq 0$

取 $x \in [L_\alpha, L_{-\alpha}]$ s.t. $\beta(x) \neq 0$ 下证 x 即为所求.

$x \in H \Rightarrow L_\lambda$ 均为 $ad\, x$ 不变子空间

$\Rightarrow \langle x, x \rangle = tr(ad\, x \cdot ad\, x) = \sum_\lambda \dim L_\lambda \cdot (\lambda(x))^2$

$\geq \dim L_\beta \cdot (\beta(x))^2 > 0$

note: 书中证明用到前边引理: $x \in [L_\alpha, L_{-\alpha}] \Rightarrow \lambda(x) = r_{\lambda,\alpha}\alpha(x)$

再由 $\beta(x) = r_{\beta,\alpha}\alpha(x) \Rightarrow r_{\beta,\alpha} \neq 0,\ \alpha(x) \neq 0$.

思路, $L^2 = L \Rightarrow \sum_\lambda [L_\lambda, L_{-\lambda}] = L_0 = H$

$\Rightarrow H = [H,H] + \sum_{\alpha\in\Phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}]$

又 $\beta(H) \neq 0 \Rightarrow \beta(\sum_\alpha [L_\alpha, L_{-\alpha}]) \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha,\ \beta([L_\alpha, L_{-\alpha}]) \neq 0$

$\Rightarrow \beta(x) \neq 0$ 的 x 即为所求

推论: L 幂零 $\Rightarrow L^2 \neq L$.

5、关于可解性

①、L 可解 $\Leftrightarrow \exists n \geq 1$, $L^{(n)}$ 可解 $\Leftrightarrow \exists n \geq 1$, L^n 可解

Pf: 由 $(L^{(n)})^{(m)} = L^{(n+m)}$ 知 $L^{(n)}$ 可解 $\Rightarrow L$ 可解

由于可解子代数可解 及 $L^{(n)} \subseteq L^{2^n} \subseteq L$, 易证.

note: 这里幂零没有相应性质

②. $\forall L$, $\forall n \geq 1$, 有 L/L^n 幂零, $L/L^{(n)}$ 可解

Pf: $(L/L^n)^n = L^n/L^n = 0$.

$(L/L^{(n)})^{(n)} = L^{(n)}/L^{(n)} = 0$.

③ 若 L 的 killing 型为幂零的, 则 L 可解

Pf: L 幂零 $\Rightarrow L^2 \neq L \Rightarrow \dim L^2 < \dim L$.

$L^2 \lhd L \Rightarrow L^2$ 继承 L 上 killing 型

又由幂零刻画: L 幂零 $\Leftrightarrow \forall x, y \in L$, $\langle x, y \rangle = 0$

知, L^2 幂零, 由归纳 L^2 可解 $\Rightarrow L$ 可解

6、半单判函：L 半单 $\Leftrightarrow$ L 的 Killing 型非退化，

Lemma: $L^\perp$ 自零

pf: $\forall x,y\in L^\perp$，$x\in L, y\in L^\perp \Rightarrow \langle x,y\rangle=0 \Rightarrow L^\perp$ 自零

pf: $\Rightarrow$：反设 L 的 Killing 型退化，即 $L^\perp\neq 0$

于是 $L^\perp \lhd L$，且由引理 $L^\perp$ 可解

故 L 有非零可解理想，因而 L 非半单

$\Leftarrow$：反设 L 非半单，构造 $0\neq x\in L$，s.t. $\forall y\in L$，$\langle x,y\rangle=0$.

设 R 为 L 的可解根，则 $R\neq 0$.

由性质 $I,J\lhd L \Rightarrow [I,J]\lhd L$，知

$R^{(0)}\supseteq R^{(1)}\supseteq\cdots\supseteq R^{(k)}=0$ 为 L 的理想链.

令 $I=R^{(k-1)}$，则 $I\neq 0$ 且 $I^2=0$，记 $n=\dim L$，$m=\dim I$.

考虑 L 由 I 扩充得到的一组基下，

$\forall x\in I$，$\mathrm{ad}\,x$ 在该基下矩阵为 $\begin{pmatrix} O_m & A \\ & O_{n-m}\end{pmatrix}$ $(I^2=0, I\lhd L)$

$\forall y\in L$ $\mathrm{ad}\,y$ 在该基下矩阵为 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ & B_3\end{pmatrix}$ $(I\lhd L)$

于是 $\mathrm{ad}\,x\cdot\mathrm{ad}\,y$ 在基下矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & AB_3 \\ & 0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle = tr(\mathrm{ad}\,x\cdot\mathrm{ad}\,y)=0$.

于是 L 的 Killing 型退化

思路：退化 $\Rightarrow L^\perp$ 为非零可解理想.

非半单 $\Rightarrow$ 对可解根 R，令 $I=R^{(k-1)} \Rightarrow I$ 中元素均退化.

推论：L 非半单 $\Leftrightarrow$ L 的 Killing 型退化 $\Leftrightarrow$ $\exists\, 0\neq I\lhd L$, s.t. $I^2=0$

pf: 第一个等价已证，仅证后一个

$\Rightarrow$：L 非半单，取可解根 R，令 $I=R^{(k-1)}$ 同上，#

$\Leftarrow$：I 特定是到 L，自上可证 $\forall x\in I, y\in L, \langle x,y\rangle=0$. #

※. 即：L 半单 $\Leftrightarrow$ L 只有零可解子理想.

$\Leftrightarrow$ L 只有零交换子理想.

7. 直和

① L_1, L_2 为 Lie 代数，定义 $L_1\oplus L_2$，即 $(k\cdot, +, [\,])$

向量空间：$L_1\oplus L_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in L_1, x_2\in L_2\}$ 为 L_1 与 L_2 的直和空间

Lie 括号：$[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]=([x_1,y_1],[x_2,y_2])$

② 刻画：(1) $L=L_1\oplus L_2$，令 $\tilde{L}_1=L_1\oplus 0=\{(x,0)\mid x\in L_1\}$，$\tilde{L}_2$ 同理.

则 $\tilde{L}_1\cong L_1$，$\tilde{L}_2\cong L_2$，$\tilde{L}_1, \tilde{L}_2\lhd L$，

$\tilde{L}_1+\tilde{L}_2=L$ 且 $\tilde{L}_1\cap\tilde{L}_2=0$.

(2) 反之，若 $L_1, L_2\lhd L$，$L=L_1+L_2$，且 $L_1\cap L_2=0$

则 $L\cong L_1\oplus L_2$

pf：(1)，令 θ_i：$\tilde{L}_i\to L_i$ 同构 $\Rightarrow$ $\tilde{L}_i\cong L_i$ $\Rightarrow$ $\tilde{L}_i$ 为 L 子代数

$(x,0)\mapsto x$

$\tilde{L}_1+\tilde{L}_2=L$，$\Rightarrow [\tilde{L}_i, L]=[\tilde{L}_i,\tilde{L}_1+\tilde{L}_2]\subseteq\tilde{L}_i\Rightarrow\tilde{L}_i\lhd L$

$\tilde{L}_1\cap\tilde{L}_2=0$ 易见

(2) 令 θ：$L_1\oplus L_2\to L$，由向量空间 $\Rightarrow$ θ 双射.

$(x_1,x_2)\mapsto x_1+x_2$

$L_1\cap L_2=0\Rightarrow [L_1,L_2]\subseteq L_1\cap L_2=0$.

于是 $[\theta(x_1,x_2),\theta(y_1,y_2)]=[x_1+x_2, y_1+y_2]$ $\supseteq [L_1,L_2]=0$

$=[x_1,y_1]+[x_2,y_2]$

$=\theta([(x_1,x_2),(y_1,y_2)])$

8. 若干引理

① $\forall I\lhd L$，$I\cap I^\perp$ 自零，继而 $I\cap I^\perp$ 可解，特别地 $L^\perp$ 本身可解

note：$I\leq L$，$I\cap I^\perp$ 未必为子理想，killing 型不传递.

② $\forall I \lhd L$, $\dim I^{\perp} \geq \dim L - \dim I$. ($I \leq L$ 亦成立)

pf: 设 $\dim I = r$, 取 L 上 I 的扩基 $\{e_1, \cdots, e_r, \cdots, e_n\}$

$\forall x = k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n \in L$,

$x \in I^{\perp} \iff \langle x, y\rangle = 0$, $\forall y \in I$

$\iff \langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall i \leq r$

$$\iff \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \cdots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_r, e_1\rangle & \cdots & \langle e_r, e_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \dim I^{\perp} \geq n - r = \dim L - \dim I$.

③ L 半单, 则 $\forall I \lhd L$, 有 $L = I \oplus I^{\perp}$ (内直和)

pf: $I \lhd L \Rightarrow I^{\perp} \lhd L \Rightarrow I \cap I^{\perp} \lhd L$,

又 $I \cap I^{\perp}$ 可解, L 半单 $\Rightarrow I \cap I^{\perp} = 0$

于是 $\dim L \geq \dim(I + I^{\perp}) = \dim I + \dim I^{\perp}$

$\geq \dim I + \dim L - \dim I = \dim L$

$\Rightarrow \dim L = \dim(I + I^{\perp}) \Rightarrow L = I + I^{\perp}$.

又 $I \cap I^{\perp} = 0 \Rightarrow L = I \oplus I^{\perp}$

④ $L = L_1 \oplus L_2$, $\Rightarrow \forall I \lhd L_1$, 有 $I \lhd L$

pf: $L = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow [L_1, L_2] = 0$

$\therefore [I, L] = [I, L_1 \oplus L_2] \subseteq [I, L_1] + [I, L_2]$

$\subseteq I + [L_1, L_2] = I$

$\Rightarrow I \lhd L$.

⑤ L 半单 $\Rightarrow \forall I \lhd L$, 有 I 半单

pf: $I \lhd L \Rightarrow L = I \oplus I^{\perp}$

$\Rightarrow \forall J \lhd I$, 有 $J \lhd L$

$\therefore I$ 的可解理想必为 L 的可解理想.

$\therefore L$ 半单 $\Rightarrow I$ 半单

推论：L 的 Killing 型非退化 $\Rightarrow \forall I \triangleleft L$，$I$ 的 Killing 型非退化.

即 $L^{\perp}=0 \Rightarrow I^{\perp}=0$.

(6). $L=L_1\oplus L_2 \Rightarrow \forall x\in L_1, y\in L_2$，有 $adx\cdot ady=0$，$\langle x,y\rangle=0$

pf: 由 $[L_1[L_2,L]]\subseteq [L_1,L_2]=0$

$\Rightarrow \forall x\in L_1, y\in L_2, z\in L$，$adx\cdot ady(z)=0$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle = tr(adx\cdot ady)=0$.

7. 定理：L 半单 $\Leftrightarrow$ L 为若干非平凡单 Lie 代数的直和.

pf: $\Rightarrow$：若 L 单，则 L 不为平凡 Lie 代数，命题立证.

若 L 非单 $\Rightarrow$ L 上存在非平凡理想，即 $\exists I\triangleleft L$，$I\neq 0, L$.

由 L 半单 $\Rightarrow L=I\oplus I^{\perp}$，

由于 $\dim I$，$\dim I^{\perp}<\dim L$，归纳立证.

$\Leftarrow$：设 $L=L_1\oplus\cdots\oplus L_r$，其中 L_i 为单 Lie 代数.

L_i 单 $\Rightarrow$ L_i 的 Killing 型非退化.

$\forall\, 0\neq x=x_1+\cdots+x_r\in L$，$x_i\in L_i$ 不妨设 $x_1\neq 0$，

$\because L_1$ 非退化 $\Rightarrow \exists y\in L_1$，s.t. $\langle x_1,y\rangle\neq 0$.

又 $\langle x_i,y\rangle=0$，$\forall i>1$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle=\langle x_1+\cdots+x_r,y\rangle=\langle x_1,y\rangle\neq 0$.

$\therefore L$ 非退化，继而 L 为半单 Lie 代数

推论：$L=L_1\oplus L_2$，则 L 半单 $\Leftrightarrow L_1, L_2$ 均半单.

note：书上"L 半单 $\Rightarrow I\triangleleft L$ 半单"从矩阵角度理解，

先做 $I\to L$ 扩基，s.t. $\forall x\in I$，$adx=\begin{pmatrix} A & * \\ & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \underset{\uparrow}{I} & \underset{\uparrow}{\text{余下}} \end{array}$$

$x\neq 0 \Rightarrow \exists y=y_1+y_2\in L$，s.t. $tr(adx\cdot ady)\neq 0$

$\Rightarrow tr(adx\cdot ady_1)\neq 0 \Rightarrow \langle x,y_1\rangle\neq 0 \Rightarrow I$ 非退化

8. note：Killing 型 把 L 转入 $ad(L)$ 上的矩阵讨论.

因为证明中，技巧多是矩阵技巧.

Cpt 4.3. 半单 Lie 代数的 cartan 分解.

0. 关于 H 模，L 模.

① L 作为 L 模，其任一子模 ⟺ 子理想.

②. 特别地，L 幂零时，L 有关于 L 模的权分解. 但此时 $L=L_0$

③. H 为 L 的幂零子代数，L 作为 H 模时，其 H 子模未必为 L 理想

实际上，$\{L_\lambda\}$ 中，仅 L_0 必为 L 子模

$\lambda\neq 0$ 时，L_λ 为 L 子模 ⟺ L_λ 交换 ⟺ $2\lambda\notin\Phi$

L_λ 为 L 子理想 ⟺ $[L_\lambda,L_\mu]=0$，$\forall\mu\neq 0$，

⟺ $\lambda+\mu\notin\Phi$，$\forall\mu\notin\Phi$.

④. H 为 L 的幂零子代数，则 $H\lhd L\Rightarrow H$ 在 L 上幂零

此时，L 关于 H 的权空间分解为 $L=L_0$

特别地，H 为 L 的 cartan 子代数时，$H\lhd L$ ⟺ $H=L$ ⟺ L 幂零.

1. H 为 L 幂零子代数，L 有关于 H 权空间分解 $L=\bigoplus_\lambda L_\lambda$

则 $\lambda+\mu\neq 0\Rightarrow\langle L_\lambda,L_\mu\rangle=0$

pf: $\langle L_\lambda,L_\mu\rangle=0$ ⟺ $\forall x\in L_\lambda$, $y\in L_\mu$，$\langle x,y\rangle=0$. 即 $tr(adx\cdot ady)=0$.

注意到 $adx\cdot ady\cdot L_\nu\subseteq L_{\lambda+\mu+\nu}$，而 $L_{\lambda+\mu+\nu}\wedge L_\nu=0$.

取各 L_λ 基并得 L 一组基.

则 $adx\cdot ady$ 在该基下矩阵的对角分块为零矩阵.

于是 $tr(adx\,ady)=0$. #

note: 这里没用到半单，以及 cartan 子代数.

note2: Killing 型，即 $\langle x,y\rangle$ 的讨论中，常用基+基下矩阵的构造技巧求迹

此外: ① $x\in L^2\Rightarrow\forall I\lhd L$，$tr_I(adx)=0$

② $x=[y\,z]$，$K\subseteq L$ 为 ady,adz 不变子空间 ⟹ $adx(K)\subseteq K$，且 $tr_K(adx)=0$.

note3：$[I,J]=0 \Rightarrow \mathrm{ad}x\cdot\mathrm{ad}y=\mathrm{ad}y\cdot\mathrm{ad}x$．反之不然．

2. H为L幂零子代数，Φ为相应非零权集．

则L半单时，$\lambda\in\Phi \Rightarrow -\lambda\in\Phi$

Pf：由上一命题，$\langle L_\lambda, L_\mu\rangle=0$，$\forall \mu\neq-\lambda$．

若$L_{-\lambda}=0$，则$\langle L_\lambda, L_{-\lambda}\rangle=0 \Rightarrow \langle L_\lambda, L\rangle=0$，

而$L_\lambda\neq0$与L半单矛盾，故$L_{-\lambda}\neq0$．即$-\lambda\in\Phi$

注：定理第一遍过时，扣准条件，为了体会这些性质在定理哪些地方中用到了．但总结时，仅记住一般定理．

（例如这里H一般只讨论cartan子代数）

3. H为L幂零子代数，L作权空间分解，并取各L_λ基并得L一组基，

则$\forall x\in H$，$\mathrm{ad}\,x$在基下矩阵为
$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda(x) & & \\ & & \lambda(x) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

于是$tr_{L_0}(\mathrm{ad}x)=0$，

$tr_{L_\lambda}(\mathrm{ad}x)=\dim L_\lambda\cdot\lambda(x)$ $\Rightarrow tr_L(\mathrm{ad}x)=\sum_\lambda \dim L_\lambda\cdot\lambda(x)$

推论：H幂零 $\Rightarrow$ H自零，即$H\neq0$时，H的Killing型退化．

4. L半单，H为L的cartan子代数，则L的Killing型限制在H上非退化，即$\langle x, H\rangle=0 \Rightarrow x=0$

Pf：命题1，$\langle x, L_\alpha\rangle=0$，$\forall\alpha\neq0$

又$\langle x, H\rangle=0$，$\Rightarrow\langle x, L\rangle=0$，

由L半单 $\Rightarrow x=0$．

note：L的Killing型限制在H上体现在$tr_L(\mathrm{ad}x\cdot\mathrm{ad}y)$而非$tr_H(\mathrm{ad}x\cdot\mathrm{ad}y)$

note2：这里严格用到cartan子代数，否则$\langle x, H\rangle=0 \not\Rightarrow \langle x, L_0\rangle=0$．

5. H为L幂零子代数 $\Rightarrow\langle H^2, H\rangle=0$

Pf：由命题3．$\forall x\in H^2$，$y\in H$，

$\langle x,y\rangle_L=tr_L(\mathrm{ad}x\cdot\mathrm{ad}y)=\sum_\lambda \dim L_\lambda\cdot\lambda(x)\cdot\lambda(y)$

注意到 $\lambda(H^2)=0$，则有 $\langle x,y\rangle_L=0$，即 $\langle H^2,H\rangle=0$

推论：L 半单 $\Rightarrow$ L 上任一cartan子代数 H 交换，即 $H^2=0$.

pf：L 的 Killing 型在 H 上非退化，而 $\langle H^2,H\rangle=0 \Rightarrow H^2=0$.

note：一般地，λ 为 H 一维表示 $\Leftrightarrow$ $\lambda\in(H/H^2)^*$

L 半单下，$H^2=0$，于是 λ 为 H 一维表示 $\Leftrightarrow$ $\lambda\in H^*$.

6. 下面开始，总假设 L 半单，H 为 cartan 子代数.

① 记 $H^*=\mathrm{Hom}(H,\mathbb{C})$，则 $\dim H^*=\dim H$

令 $\varphi: H\to H^*$，则 φ 构成同构

$h\mapsto h^*: x\mapsto\langle h,x\rangle$

Pf：由 $\langle,\rangle$ 线性性 $\Rightarrow$ φ 线性性

注意到 $\dim H=\dim H^*$，只须证 φ 单或 φ 满.

$\varphi(h)=0 \Leftrightarrow h^*=0 \Leftrightarrow h^*(x)=\langle h,x\rangle=0,\ \forall x\in H$ ⊇ H 上 Killing 型非退化.

$\Leftrightarrow h=0$

故 φ 为单射.

note：一般地，双线性 $\langle,\rangle$ 诱导 $V\to V^*$ 线性映射

当且仅当 $\langle,\rangle$ 非退化时，$\langle,\rangle$ 诱导同构.

※. 因此，下面 H 与 H^* 的关系由 Killing 型诱导.

② 由于 $\varphi: H\to H^*$ 为双射.

$h\mapsto h^*$

于是 $\varphi^{-1}: H^*\mapsto H$，对 $\Phi\subseteq H^*$，得到 $\varphi^{-1}(\Phi)\subseteq H$

$h^*\mapsto h$

$\forall\alpha\in\Phi$，记 $h_\alpha'=\varphi^{-1}(\alpha)\in H$

③. 引理：$\forall K\le L$ 为 L 子空间，有 $\dim K^\perp \ge \dim L-\dim K$

pf: 同前述，取 L 上 K 的扩基 $\{e_1,\cdots,e_r,\cdots,e_n\}$

$\forall x=k_1e_1+\cdots+k_ne_n\in L$

$x\in K^\perp \Leftrightarrow \langle x,K\rangle=0$

$\Leftrightarrow \langle x,e_i\rangle=0,\ \forall i\le r$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle e_r,e_1\rangle & \cdots & \langle e_r,e_n\rangle\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow \dim K^\perp \ge \dim L-\dim K$.

note: L 半单，$K\trianglelefteq L$ 时，上述取等。

④. $x\in H$，若 $\forall\alpha\in\Phi$，有 $\alpha(x)=0$，则 $x=0$

pf: $\forall y\in H$，$\langle x,y\rangle=tr(ad x\cdot ad y)=\sum\limits_{\lambda}\dim L_\lambda\,\lambda(x)\cdot\lambda(y)=0$.

由 H 上 Killing 型非退化 $\Rightarrow x=0$.

推论：$H=\langle h_\alpha'\mid\alpha\in\Phi\rangle$ (亦可由对偶空间立得 $\langle\Phi\rangle=H^*$)

pf: 设 $K=\langle h_\alpha'\mid\alpha\in\Phi\rangle$，

若 $K\ne H \Rightarrow \dim K^\perp\ge\dim L-\dim K>\dim L-\dim H$

$\Rightarrow \dim K^\perp+\dim H>\dim L$

$\Rightarrow K^\perp\cap H\ne 0$

对 $x\in K^\perp\cap H$，$\langle x,K\rangle=0\Rightarrow\alpha(x)=\langle h_\alpha',x\rangle=0$，$\forall\alpha\in\Phi$

$\Rightarrow x=0$，矛盾.

7. 相关性质

① $\forall\alpha\in\Phi$，$h_\alpha'\in[L_\alpha,L_{-\alpha}]$

pf: L_α 为 H 模，取其不可约子模 Ce_α，$e_\alpha\in L_\alpha$，

则 $\forall x\in H$，$ad x(e_\alpha)=\alpha(x)e_\alpha$

$\forall y\in L_{-\alpha}$，断言 $[e_\alpha,y]=\langle e_\alpha,y\rangle h_\alpha'$

$\forall x\in H$，$\langle[e_\alpha,y],x\rangle=\langle[x,e_\alpha],y\rangle$

$= \langle \alpha(x)\cdot e_\alpha, y\rangle$

$= \alpha(x)\langle e_\alpha, y\rangle$

$= \langle h_\alpha'\cdot\langle e_\alpha, y\rangle, x\rangle$

$\Rightarrow [e_\alpha, y] = h_\alpha'\cdot\langle e_\alpha, y\rangle$

又 $\langle e_\alpha, L_{-\alpha}\rangle \neq 0$，否则 $\langle e_\alpha, L\rangle = 0 \Rightarrow e_\alpha = 0$ 矛

设 $\langle e_\alpha, y\rangle \neq 0$，令 $e_{-\alpha} = \frac{1}{\langle y, e_\alpha\rangle} y \in L_{-\alpha}$，

则有 $h_\alpha' = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$，#

推论：对 h_α'，$\exists\, e_\alpha \in L_\alpha$，s.t. $[x, e_\alpha] = \alpha(x) e_\alpha$，$\forall x \in H$

$[e_\alpha, y] = \langle e_\alpha, y\rangle h_\alpha'$，$\forall y \in L_{-\alpha}$

特别地，$\exists\, e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$，s.t. $h_\alpha' = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$

(2) $\langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle \neq 0$，$\forall \alpha \in \Phi$

pf: 已知 $\forall \beta \in \Phi$，$\exists\, r_{\beta,\alpha} \in \mathbb{Q}$，s.t. $\beta = r_{\beta,\alpha}\,\alpha \,\big|_{[L_\alpha, L_{-\alpha}]}$

反设 $\langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle = 0$，由 $h_\alpha' \in [L_\alpha, L_{-\alpha}]$ 知

$\forall \beta \in \Phi$，$\beta(h_\alpha') = r_{\beta,\alpha}\,\alpha(h_\alpha') = r_{\beta,\alpha}\cdot\langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle = 0$.

由命题 6.④，立得 $h_\alpha' = 0$ 矛.

③. $\dim L_\alpha = 1$，$\forall \alpha \in \Phi$.

pf: 对 h_α'，由①，得到 $e_\alpha \in L_\alpha$，$e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$，s.t. $h_\alpha' = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$

令 $M = \mathbb{C}\cdot e_\alpha \oplus \mathbb{C}\cdot h_\alpha' \oplus L_{-\alpha} \oplus L_{-2\alpha} \oplus \cdots \oplus L_{-r\alpha}$，s.t. $L_{-(r+1)\alpha} = 0$.

由 $\begin{cases} [e_\alpha, e_\alpha] = 0 \\ [e_\alpha, h_\alpha'] = -\alpha(h_\alpha') e_\alpha \\ [e_\alpha, y] = \langle e_\alpha, y\rangle h_\alpha', \ \forall y \in L_{-\alpha} \\ [e_\alpha, L_{-i\alpha}] \subseteq L_{-(i-1)\alpha} \end{cases}$ 知，M 为 $\mathrm{ad}\, e_\alpha$ 不变子空间.

由 $\begin{cases} [e_{-\alpha}, e_\alpha] = -h_\alpha' \\ [e_{-\alpha}, h_\alpha'] = \alpha(h_\alpha') e_{-\alpha} \\ [e_{-\alpha}, L_{-i\alpha}] \subseteq L_{-(i+1)\alpha} \end{cases}$ 知，M 为 $\mathrm{ad}\, e_{-\alpha}$ 不变子空间.

又 $h_\alpha' = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \Rightarrow tr_M(ad\, h_\alpha') = 0$

另一方面 $h_\alpha' \in H$, $[h_\alpha' e_\alpha] = \alpha(h_\alpha') e_\alpha$, $[h_\alpha', h_\alpha'] = 0$

$$\Rightarrow tr_M(ad\, h_\alpha') = \alpha(h_\alpha') + \sum_{i=1}^{r} \dim L_{-i\alpha} \cdot -i \cdot \alpha(h_\alpha')$$

$$= \alpha(h_\alpha') \cdot (1 - \sum_{i=1}^{r} i \cdot \dim L_{-i\alpha})$$

又 $\alpha(h_\alpha') = \langle h_\alpha', h_\alpha' \rangle \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} i \cdot \dim L_{-i\alpha} = 1 \Rightarrow \dim L_{-\alpha} = 1$, $\dim L_{-i\alpha} = 0$, $\forall i > 1$

note: 用到性质: $x \in H \Rightarrow tr(ad\, x) = \sum_\lambda \dim L_\lambda \cdot \lambda(x)$

$x = [yz] \Rightarrow ad\, y, ad\, z$ 不变子空间上, $tr(ad\, x) = 0$.

思路, 构造不变子空间, 并利用 h_α' 的迹导出性质.

推论: $\forall \alpha \in \Phi$, $r\alpha \in \Phi$ 且 $r \in \mathbb{Z} \Rightarrow r = \pm 1$

推论2: L 半单 $\Rightarrow L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$, 其中 L_α 均为不可约 H 模

§. α-chain.

①. $\forall \alpha, \beta \in \Phi$, 且 $\alpha \neq \pm\beta$

$\exists\, p, q \geq 0$, s.t. $i\alpha + \beta \in \Phi$, $\forall -p \leq i \leq q$

$i\alpha + \beta \notin \Phi$, $i = -p-1$ 或 $q+1$

并称 $\{i\alpha + \beta \mid -p \leq i \leq q\}$ 为通过 β 的 α 链.

note: $\alpha = \pm\beta$ 则链经过 0, 且 $p = q = 1$ 已确定, 讨论无意义

②. $\forall \alpha, \beta \in \Phi$, 且 $\alpha \neq \pm\beta$, 则 $\dfrac{\langle h_\alpha', h_\beta' \rangle}{\langle h_\alpha', h_\alpha' \rangle} = \dfrac{p-q}{2}$

pf: 令 $M = \bigoplus_{i=-p}^{q} L_{-i\alpha+\beta}$, 则 M 为 $e_\alpha, e_{-\alpha}$ 不变子空间

$$\Rightarrow 0 = tr_M(ad\, h_\alpha') = \sum_{i=-p}^{q} \dim L_{-i\alpha+\beta} \cdot (i\alpha+\beta)(h_\alpha') \quad \dim L_{-i\alpha+\beta} = 1$$

$$= \sum_{i=-p}^{q} i\alpha(h_\alpha') + (p+q+1)\beta(h_\alpha')$$

$$= (\tfrac{1}{2} q(q-1) - \tfrac{1}{2} p(p-1))\alpha(h_\alpha') + (p+q+1)\beta(h_\alpha')$$

又 $\frac{1}{2}(q^2 - q - p^2 + p) = \frac{1}{2}(q-p)(p+q+1)$, $p+q+1 \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(q-p)\langle h_\alpha', h_\alpha' \rangle + \langle h_\beta', h_\alpha' \rangle = 0$. 移项即证.

note: 由 $\beta|_{[L_\alpha, L_{-\alpha}]} = r_{\alpha\beta} \cdot \alpha|_{[L_\alpha, L_{-\alpha}]} \Rightarrow \beta(h_\alpha') = r_{\alpha\beta}\,\alpha(h_\alpha')$ 亦可求得.

③. $\alpha\in\Phi$ 且 $c\alpha\in\Phi$, $c\in\mathbb{C}$. 则 $c=\pm1$

Pf: 设 $\beta=c\cdot\alpha\in\Phi \Rightarrow \beta(h_\alpha')=c\cdot\alpha(h_\alpha')$

$\Rightarrow \langle h_\alpha', h_\beta'\rangle = c\cdot\langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle$

$\Rightarrow c=\frac{p-q}{2} \Rightarrow 2c\in\mathbb{Z}$

若 $c\in\mathbb{Z}$, 则 $c=\pm1$, 已证.

若 $c\notin\mathbb{Z}$, 则 通过 β 的 α 链为 $-\frac{p+q}{2}\alpha, \cdots, \beta=\frac{p-q}{2}\alpha, \cdots, \frac{p+q}{2}\alpha$

$\beta\neq0 \Rightarrow p\neq q$, $\Rightarrow \frac{1}{2}\alpha\in\Phi$. 与 $\alpha=2\cdot(\frac{1}{2}\alpha)\in\Phi$ 矛盾.

④. $\forall\alpha,\beta\in\Phi$, $\langle h_\alpha', h_\beta'\rangle\in\mathbb{Q}$

Pf: 已知 $\frac{\langle h_\alpha', h_\beta'\rangle}{\langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle}=\frac{p-q}{2}\in\mathbb{Q}$, $\forall\alpha\neq\beta\in\Phi$.

故 只须证 $\langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle\in\mathbb{Q}$

$\because \langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle = tr(ad\,h_\alpha'\cdot ad\,h_\alpha')$

$=\sum_{\beta\in\Phi}\beta(h_\alpha')^2$

$=\sum_{\beta\in\Phi}\langle h_\alpha', h_\beta'\rangle^2$

$\therefore \frac{1}{\langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle}=\sum_{\beta\in\Phi}\left(\frac{\langle h_\alpha', h_\beta'\rangle}{\langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle}\right)^2\in\mathbb{Q}$

$\therefore \langle h_\alpha', h_\alpha'\rangle\in\mathbb{Q}$. #

Cpt4. Lie 代数 $sl_n(\mathbb{C})$

1. 线性 Lie 代数

① $gl_n(\mathbb{C})$ 由 $\mathbb{C}$ 上所有 n 阶矩阵构成, 关于乘法作成代数.

于是 $gl_n(\mathbb{C})$ 关于 $[AB]=AB-BA$ 自然得到 Lie 代数结构.

亦即 $gl_n(\mathbb{C})=[M_n(\mathbb{C})]$, 称为一般线性 Lie 代数

②. $gl_n(\mathbb{C})$ 的子代数 $sl_n(\mathbb{C})=\{A\in gl_n(\mathbb{C}) \mid trA=0\}$,

称 $sl_n(\mathbb{C})$ 为特殊线性 Lie 代数.

③. $\dim gl_n(\mathbb{C})=n^2$, $\dim sl_n(\mathbb{C})=n^2-1$

总假定 $n\geq2$, $\{E_{ii}-E_{i+1,i+1}$ $i=1,\cdots,n-1$ 作成 $sl_n(\mathbb{C})$ 一组基.

$E_{ij},\ i\neq j$

2. $sl_n(\mathbb{C})$ 为单 Lie 代数

pf: 由 $gl_n(\mathbb{C}) = sl_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}I_n$

$\Rightarrow \forall\, I \triangleleft sl_n(\mathbb{C}),\ I \triangleleft gl_n(\mathbb{C}).$

故只须证 $gl_n(\mathbb{C})$ 上含于 $sl_n(\mathbb{C})$ 的非零理想仅 $sl_n(\mathbb{C})$

设 $0 \neq I \triangleleft gl_n(\mathbb{C})$ 且 $I \subseteq sl_n(\mathbb{C})$,

先证 $\exists\, i\neq j$ s.t. $E_{ij} \in I$.

设 $0 \neq x = \sum_{p,q} x_{pq} E_{pq} \in I$, 则 x_{pq} 不全为 0.

① 若 $\exists\, i\neq j$, s.t. $x_{ij} \neq 0$,

由 $[E_{ii}, E_{pq}] = \delta_{ip} E_{pq} - \delta_{iq} E_{pq}$

$\Rightarrow [E_{ii}, x] = \sum_{p,q} x_{pq} [E_{ii}, E_{pq}]$

$= \sum_q x_{iq} E_{iq} - \sum_p x_{pi} E_{pi} \in I$

$\Rightarrow [[E_{ii}, x], E_{jj}] = \sum_q x_{iq} E_{iq} \cdot \delta_{qj} - \sum_p x_{pi} \cdot E_{pi} \cdot \delta_{ij}$

$- \left(\sum_q x_{iq} E_{iq} \cdot \delta_{ij} - \sum_p x_{pi} E_{pi} \cdot \delta_{pj} \right)$ $\delta_{ij}=0$

$= x_{ij} E_{ij} + x_{ji} E_{ji} \in I$

$\Rightarrow [E_{ii} - E_{jj},\ x_{ij}E_{ij} + x_{ji}E_{ji}] = (x_{ij}E_{ij} - x_{ji}E_{ji}) - (x_{ji}E_{ji} - x_{ij}E_{ij})$

$= 2x_{ij}E_{ij} - 2x_{ji}E_{ji}$

$\Rightarrow 4x_{ij}E_{ij} \in I$ $x_{ij} \neq 0$

$\Rightarrow E_{ij} \in I.$

② 若 $\forall\, i\neq j,\ x_{ij} = 0$, 则 $x = \sum x_{pp} E_{pp}$

由 $x \in sl_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \sum x_{pp} = 0$ x_{pp} 不全为0

$\Rightarrow x_{pp}$ 不全相等

$\Rightarrow$ 不妨设 $x_{ii} \neq x_{jj}$

又 $[x, E_{ij}] = (x_{ii} - x_{jj}) E_{ij} \in I$

$\Rightarrow E_{ij} \in I$

综合(1),(2),选 $i\neq j$, s.t. $E_{ij}\in I$

$\Rightarrow \forall q\neq i,j,\ E_{iq}=[E_{ij},E_{jq}]\in I \Rightarrow \{E_{iq}\mid q\neq i\}$ 取到

$\Rightarrow \forall p\neq i,q,\ E_{pq}=[E_{pi},E_{iq}]\in I \Rightarrow \{E_{pq}\mid p\neq q\}$ 取到

又 $\forall p\neq q,\ E_{pp}-E_{qq}=[E_{pq},E_{qp}]\in I \Rightarrow sl_n(\mathbb{C})$ 对角线取到.

故 $I=sl_n(\mathbb{C})$.

note: $E_{ii}A$ 保留 A 第 i 行.

AE_{ii} 保留 A 第 i 列

$E_{ij}A$ 把 A 第 j 行移至第 i 行

AE_{ij} 把 A 第 i 列移至第 j 列

推论: $[E_{ii},E_{pq}]=\delta_{ip}E_{pq}-\delta_{iq}E_{pq}$, $\forall p,q$

$[[E_{ii},x],E_{jj}]=x_{ij}E_{ij}+x_{ji}E_{ji}$, $\forall i\neq j$

3. 记 $L=sl_n(\mathbb{C})$, 令 H 为 L 的对角阵,

则 $\dim H=n-1$ 且 H 为 L 的 cartan 子代数

pf: 易见 $\dim H=n-1$, 且 $[H,H]=0$, H 为 L 幂零子代数

只须证 $N(H)=H$

若 $x=\sum_{i,j}\lambda_{ij}E_{ij}\in N(H)$, 则对任意 $\sum_k \mu_k E_{kk}\in H$

有 $[\sum_k\mu_k E_{kk},\sum_{i,j}\lambda_{ij}E_{ij}]=\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}A-A\begin{pmatrix}\mu_1&&\\&\ddots&\\&&\mu_n\end{pmatrix}$, $A=(\lambda_{ij})$

$=((\mu_i-\mu_j)\lambda_{ij})\in H$

$\Rightarrow (\mu_i-\mu_j)\lambda_{ij}=0$, $\forall i\neq j$

由 $\sum_k\mu_kE_{kk}$ 任意性 $\lambda_{ij}=0 \Rightarrow x=\sum_{i,j}\lambda_{ij}E_{ij}$ 为对角阵.

故 $N(H)\subseteq H$ #

note: $sl_n(\mathbb{C})$ 上, $N(H)=H$, 但 $gl_n(\mathbb{C})$ 上 $N(H)\neq H$

令 $\tilde{H}$ 为 $gl_n(\mathbb{C})$ 的对角阵. 同理可得 $\tilde{H}$ 为 $gl_n(\mathbb{C})$ 的 cartan 子代数.

note 2: $H\leq gl_n(\mathbb{C})$, $gl_n(\mathbb{C})$ 作 H 模 权分解, 得 $gl_n(\mathbb{C})=L_0\oplus(\bigoplus_\lambda L_\lambda)$

其与 $gl_n(\mathbb{C})$ 的 cartan 分解效果相同, 但 $\tilde{H}=L_0\neq H$

Q：注意到 $sl_n(\mathbb{C}) = gl_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\cdot I_n$ 即为 $gl_n(\mathbb{C})$ 商去可解根得到的半单代数

一般地，L 为 $\tilde{L}$ 得到的半单Lie代数，$\tilde{L}$ 作为 $\tilde{H}$，H 模有什么关系？

Q2：$sl_n(\mathbb{C})$ 上所有 Cartan 子代数刻画.

法1：$\forall y = \sum \mu_i e_i \in L$，由 $\det(t\cdot 1 - ad\, y) \Rightarrow$ 子刚定作成 $R = \{\mu_k$ 非重点$\}$

法2：L 上任二 cartan 子代数 内自同构

4. H 为 L 对角阵，则 L 有关于 H 的 cartan 分解 $L = H \oplus \sum_{i \neq j} \mathbb{C}E_{ij}$

pf：$\forall i \neq j$，$[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{kk}, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$

$\Rightarrow \mathbb{C}E_{ij}$ 为 H 模.

推论：L 在 H 下 cartan 分解的根子 $\Phi = \{\alpha_{ij} = E_{ii}^* - E_{jj}^* \mid i \neq j\}$

即：$E_{ii}^* - E_{jj}^*$：
$$H \longrightarrow \mathbb{C}.$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto \lambda_i - \lambda_j$$

note：$gl_n(\mathbb{C})$ 的 cartan 分解，根系，均与 $sl_n(\mathbb{C})$ 类似.

5. 设 $x = \sum_i \lambda_i E_{ii}$，$y = \sum_i \mu_i E_{ii} \in H$，则 $\langle x, y \rangle = 2n\, tr(xy)$

pf：$\langle x, y\rangle = tr(ad x \cdot ad y) = \sum_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)(\mu_i - \mu_j)$ （H上 求和公式）

$= \sum_{i,j} (\lambda_i \cdot \mu_i + \lambda_j \cdot \mu_j - \lambda_i \mu_j - \lambda_j \mu_i)$

$= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_i + \sum_{i,j} \lambda_j \mu_j - 2 \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j$

$= 2n \cdot \sum_i \lambda_i \mu_i - 2 \sum_i \lambda_i (\sum_j \mu_j)$，$\sum_j \mu_j = 0$.

$= 2n\, tr(xy)$

推论：$\forall \alpha_{ij} = E_{ii}^* - E_{jj}^* \in \Phi$，$h'_{\alpha_{ij}} = \frac{1}{2n}(E_{ii} - E_{jj})$

pf：$\forall x = \sum_k \lambda_k E_{kk} \in H$，

由 $\langle \frac{1}{2n}(E_{ii} - E_{jj}), x \rangle = 2n\, tr(\frac{1}{2n}(E_{ii} - E_{jj}) \cdot x)$

$= \lambda_i - \lambda_j = \alpha_{ij}(x)$

$\Rightarrow h'_{\alpha_{ij}} = \frac{1}{2n}(E_{ii} - E_{jj})$

note：也可由 $h'_{\alpha_{ij}} = \langle e_{\alpha_{ij}}, e_{-\alpha_{ij}} \rangle^{-1} \cdot [e_{\alpha_{ij}}, e_{-\alpha_{ij}}]$

$$= \langle E_{ij}, E_{ji} \rangle^{-1} \cdot [E_{ij}, E_{ji}]$$

$$= \frac{1}{2n} \cdot (E_{ii} - E_{jj})$$