Cpt 5. 根系与 weyl 群

recall:

1. 对偶空间性质，下设 V 为有限维线性空间. $(\mathbb{R}^n)$

① $f\in V^* \Rightarrow f=\sum_i f(e_i)\cdot e_i^*$,

$x\in V \Rightarrow x=\sum_i e_i^*(x)\, e_i$

② $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (e_1 \cdots e_n)A$.

$\Leftrightarrow (e_1^*, \cdots, e_n^*) = (\varepsilon_1^*, \cdots, \varepsilon_n^*)\cdot A^T$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (e_i^*(\varepsilon_j)) = A$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1^* \\ \vdots \\ \varepsilon_n^* \end{pmatrix}(e_1 \cdots e_n) = (\varepsilon_i^*(e_j)) = A^T$

③ 对偶下，V 与 V^* 建立一一对应，

取定 V 一组基 $\{e_i\}$，得到同构
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & V^* \arrow[r, "\varphi_2"] & V^{**} \end{tikzcd}$$
其中 $\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1$,

且取不同基下，得到 φ 相同.（因而 V, V^{**} 可等同起来）

④ $V^*=\langle f_i\rangle \Leftrightarrow x\in V$ s.t. $\forall i$, $f_i(x)=0$ 时，有 $x=0$.

⑤ 对 $\varphi: V\to V^*$, 令 $\langle\, ,\, \rangle: V\times V \to \mathbb{R}$
$$(x,y) \mapsto \varphi(x)(y).$$

则 $\langle\, ,\rangle$ 作成 V 上内积 有以下刻画.

(1). $\exists$ 基 $\{e_i\}$, s.t. $\varphi(e_i)=e_i^*$,

(2) $\forall$ 基 $\{e_i\}$, $\varphi(e_1 \cdots e_n) = (e_1^* \cdots e_n^*)B$, 其中 B 正定.

(3) $\varphi(e_i)=\varepsilon_i^*$, 且 $\begin{pmatrix} \varepsilon_1^* \\ \vdots \\ \varepsilon_n^* \end{pmatrix}(e_1 \cdots e_n) = B$ 正定.

note: 三种情况中，规范正交基分别为

(1): $\{e_i\}$ ✓

(2): $B=A^TA$, $(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(e_1\cdots e_n)A^{-1}\Rightarrow\{\varepsilon_i\}$. ✓

(3). $B=A^TA$, $(\eta_1,\cdots\eta_n)=(e_1,\cdots e_n)A^T\Rightarrow\{\eta_i\}$ ✓

2. $\langle,\rangle$ 计算技巧.

① $x\in H\Rightarrow$ $\mathrm{ad}x=\begin{pmatrix}\lambda_1(x)&&\\&\ddots&\\&&\lambda_r(x)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x)=\sum_\lambda\lambda(x)\cdot\dim L_\lambda$

理, H 上的 $\langle,\rangle$ 计算可用此得到.

② 找基下. $I\lhd L$, $x\in L\Rightarrow\mathrm{ad}x=\begin{pmatrix}A&*\\&0\end{pmatrix}$

$K\leq L$, $x\in K\Rightarrow\mathrm{ad}x=\begin{pmatrix}A&*\\&B\end{pmatrix}$

③. $\beta\big|_{[L_\alpha,L_{-\alpha}]}=r_{\alpha,\beta}\cdot\alpha\big|_{[L_\alpha,L_{-\alpha}]}$

具体地, $r_{\alpha,\beta}=\dfrac{-\sum_{i=-p}^{q}i\cdot\dim L_{i\alpha+\beta}}{\sum_{i=-p}^{q}\dim L_{i\alpha+\beta}}=\dfrac{p-q}{2}$

④. $\beta(h)=\langle h,h_\beta'\rangle$, 即, 用对偶空间来求 $\langle,\rangle$.

Cpt5.1. 正根系与单根系.

0. recall: L 的 cartan 分解 $L=H\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}L_\alpha$,

且有 $H^*=\langle\Phi\rangle$, $H=\langle h_\alpha'\mid\alpha\in\Phi\rangle$

下设 $\{h_{\alpha_i}'\}_{i=1}^{l}$ 作成 H 一组基.

1. 基本性质.

recall: 设 $\langle,\rangle$ 为 V 上的非退化的双线性型,

对 V 上一组基 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$, 令 $A=(\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle)_{n\times n}$.

则 $\forall x=\sum_i x_i\varepsilon_i$, $y=\sum_i y_i\varepsilon_i$, 有 $\langle x,y\rangle=(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

① . 令 $A=(\langle h_{\alpha_i}',h_{\alpha_j}'\rangle)$, 则 A 对称正定.

Pf: 对称性由 $\langle,\rangle$ 对称性立见.

又 $(x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\end{pmatrix}=\sum_i\sum_j x_ix_j\langle h_{\alpha_i}',h_{\alpha_j}'\rangle$, $\langle x,y\rangle=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y)$

$= \sum_i\sum_j x_i x_j \underbrace{\sum_\lambda \lambda(h_{\alpha_i}')\cdot\lambda(h_{\alpha_j}')}$

$= \sum_\lambda \cdot \sum_i\sum_j x_i\cdot\lambda(h_{\alpha_i}')\cdot x_j\cdot\lambda(h_{\alpha_j}')$ key

$= \sum_\lambda \cdot \left(\sum_i x_i \cdot \lambda(h_{\alpha_i}')\right)^2$

$\Rightarrow$ 半正定性，

又 $\sum_\lambda \cdot\left(\sum_i x_i\cdot\lambda(h_{\alpha_i}')\right)^2=0 \Rightarrow \sum_i x_i\lambda(h_{\alpha_i}')=0,\ \forall\lambda$

$\Rightarrow \lambda\left(\sum_i x_i h_{\alpha_i}'\right)=0,\ \forall\lambda$ $\quad \supseteq \langle\lambda \mid \lambda\in\Phi\rangle = H^*$

$\Rightarrow \sum_i x_i h_{\alpha_i}'=0$

$\Rightarrow$ 正定性.

note: 直接用 $\langle x,x\rangle=\sum_\lambda \lambda(x)^2$ 立证. !!

② 由内积相关性质，对 $B=(\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle)_{n\times n}$, $(e_1\cdots e_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)\cdot A$,

有 $(\langle e_i,e_j\rangle)_{n\times n} = \begin{pmatrix}\langle e_1,*\rangle\\ \vdots\\ \langle e_n,*\rangle\end{pmatrix}(e_1\cdots e_n)$

$= A^T\begin{pmatrix}\langle\varepsilon_1,*\rangle\\ \vdots \\ \langle\varepsilon_n,*\rangle\end{pmatrix}\cdot(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A$

$= A^TBA$

设 $(\langle h_{\alpha_i}',h_{\alpha_j}'\rangle)=P^TP$, 则 $(e_1\cdots e_l)=(h_{\alpha_1}'\cdots h_{\alpha_l}')P^{-1}$ 为规范正交基.

③ 同时，$\varphi: H\to H^*$，可用 h_{α_i}' 及其对偶基表示.

解:

$\varphi\begin{pmatrix}h_{\alpha_1}'\\ \vdots\\ h_{\alpha_l}'\end{pmatrix}(h_{\alpha_1}',\cdots h_{\alpha_l}') = (\langle h_{\alpha_i}',h_{\alpha_j}'\rangle) = A$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_l\end{pmatrix}(h_{\alpha_1}'\cdots h_{\alpha_l}')=A \Rightarrow (\alpha_1,\cdots,\alpha_l)=(h_{\alpha_1}'^*\cdots h_{\alpha_l}'^*)A^T$

即. $\varphi(h_{\alpha_1}',\cdots h_{\alpha_l}')=(h_{\alpha_1}'^*,\cdots,h_{\alpha_l}'^*)A^T$

④ $\forall h=\sum_i \mu_i h_{\alpha_i}'$, 有 $\langle h,h_{\alpha_i}'\rangle=(\mu_1\cdots\mu_l)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{(i)}$

$$\Rightarrow (\mu_1 \cdots \mu_l) A = \begin{pmatrix} \langle h, h_{\alpha_1}' \rangle \\ \vdots \\ \langle h, h_{\alpha_l}' \rangle \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\mu_1, \cdots, \mu_l) = A^{-1} \begin{pmatrix} \langle h, h_{\alpha_1}' \rangle \\ \vdots \\ \langle h, h_{\alpha_l}' \rangle \end{pmatrix}$$

即 $\mu_i = \mathrm{row}_i A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \langle h, h_{\alpha_1}' \rangle \\ \vdots \\ \langle h, h_{\alpha_l}' \rangle \end{pmatrix}$

特别地，$\forall \alpha$，h_α' 在基下的表示系数均为有理数.

⑥. 令 $H_{\mathbb{Q}}$，$H_{\mathbb{R}}$ 分别为 $\{h_{\alpha_i}\}$ 在 $\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$ 上线性张成的空间，

则其与基选取无关，并令 $H_{\mathbb{Q}}^*$，$H_{\mathbb{R}}^*$ 为其在 H^* 上的像.

2. 全序性质

①. 线性空间上的全序（令 $V = H_{\mathbb{R}}^*$）

V 上关系 "<" 满足：

(1) 传递性：$\lambda < \mu$，$\mu < \nu \Rightarrow \lambda < \nu$.

(2) 有关系：$\forall \lambda, \mu$，有 $\lambda < \mu$ 或 $\lambda > \mu$ 或 $\lambda = \mu$

(3) 平移性：$\lambda < \mu \Rightarrow \lambda + \nu < \mu + \nu$

(4) 伸缩性：$\lambda < \mu$，$r \in \mathbb{R}$，则 $r > 0 \Rightarrow r\lambda < r\mu$

$r < 0 \Rightarrow r\lambda > r\mu$.

②. 若 $\lambda > 0$，则称 λ 为正根，V 上正根全体构成 V^+

同理定义负根 $\Rightarrow V^-$

③ $\mathbb{R}^n$ 上全序 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ 上字典序.

note: $\mathbb{R}^n$ 一组基关于字典序唯一确定全序，反之没有唯一性，

但 $\mathbb{R}^n$ 赋予内积下，$\mathbb{R}^n$ 上全序可唯一确定一组规范正交基.

note2: 证明用到链体 wne

3. 根系

①. 对 V 上任一全序，令 $\Phi^+ = \Phi \cap V^+$，称为正根集，

$\Phi^- = \Phi \cap V^-$，称为负根集.

② 令 $\Pi = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha$ 不能分解为多于1个正根之和$\}$.

并称 Π 为单根系。

note: 反射群中，$\Delta=\{\alpha\in\Phi\}$ Φ 中元在 Δ 上表示系数非正或非负了。

③. 性质 1：Φ^+ 由 Π 生成，且表示系数均为非负整数。

Pf: $\forall\alpha\in\Phi^+$，对 α 序归纳，

若 $\alpha\in\Pi$，显然，

若 $\alpha\notin\Pi\Rightarrow\exists\beta,\gamma\in\Phi^+$, s.t. $\alpha=\beta+\gamma$

其中 $\gamma,\beta<\alpha$，归纳显然。

性质 2：$\forall\alpha\neq\beta\in\Pi$，有 $\langle\alpha,\beta\rangle\leq 0$.

Pf: $\alpha-\beta\notin\Phi$，否则 $\alpha-\beta\in\Phi^+$ 或 $\beta-\alpha\in\Phi^+$

$\Rightarrow\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ 或 $\beta=(\beta-\alpha)+\alpha$，矛盾。

于是通过 β 的 α 链为 $\beta,\beta+\alpha,\cdots,\beta+q\alpha$

$\Rightarrow\langle\alpha,\beta\rangle=\langle h_\alpha',h_\beta'\rangle=\frac{r-q}{2}\cdot\langle h_\alpha',h_\alpha'\rangle=\frac{-q}{2}\langle h_\alpha',h_\alpha'\rangle\leq 0.$

note: 取等 iff $\alpha+\beta\notin\Phi$.

性质 3. Π 为 H_R^* 的一组基。

Pf: $H_R^*=\langle\Phi\rangle=\langle\Phi^+\rangle=\langle\Pi\rangle\Rightarrow$ 生成性。

设 $\pi=\{\alpha_i\}_{i=1}^{l}$，反设 $\{\alpha_i\}$ 线性相关，

$\Rightarrow\exists$ 指标集 $I,J\subseteq\{1,\cdots,l\}$，$I,J$ 不全为空 且 $I\cap J=\phi$

s.t. $\beta=\sum_{i\in I}\mu_i\alpha_i=\sum_{j\in J}k_j\alpha_j$，$\mu_i,k_j>0$，$i\in I,j\in J$.

$\Rightarrow\langle\beta,\beta\rangle=\langle\sum_{i\in I}\mu_i\alpha_i,\sum_{j\in J}k_j\alpha_j\rangle$

$=\sum_{i,j}\mu_i k_j\cdot\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\leq 0.$

又 $\beta\neq 0$，与正定性矛盾。#

推论：$\forall\alpha\in\Phi$，α 为 Π 非负线性组合或非正线性组合。

note: Π 性质的导出过程和方式与反射群有所差异。

Cpt 5.2. Wely 群

1、recall：$\langle , \rangle$ 诱导 H 与 H^* 关系 ⇒ 导出正定性.

定义了 $V = H_0^*$ 上之序，以及正根系，单根系.

导出 Φ 的性质：基性质

非负整表示 Φ^+

夹角 $\geq \frac{\pi}{2}$.

2、Wely 群

① $\forall \alpha \in \Phi$，令 $S_\alpha: V \to V$，则 S_α 作为 V 上反射.

$$x \mapsto x - 2\frac{\langle \alpha, x\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} \cdot \alpha$$

且有 $S_\alpha(\alpha) = -\alpha$,

$S_\alpha(x) = x$ iff $\langle \alpha, x\rangle = 0$.

② 令 $W = \langle S_\alpha \mid \alpha \in \Phi\rangle$，则 W 称为 Wely 群

note：反射均为正交变换 ⇒ W 由正交变换构成，保内积 $\langle , \rangle$

3、基本性质

①. $W\Phi = \Phi$

Pf：由 $W = \langle S_\alpha \mid \alpha \in \Phi\rangle$，仅须证 $S_\alpha \beta \in \Phi$. $\forall \alpha, \beta \in \Phi$

$\alpha = \pm\beta \Rightarrow S_\alpha \beta = -\beta \in \Phi$

$\alpha \neq \pm\beta \Rightarrow S_\alpha \beta = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} \cdot \alpha$ 𝒱 α 链

$= \beta - (p-q) \cdot \alpha$

其中 $p-q \leq p \Rightarrow \beta - (p-q)\alpha$ 仍在 α 链上，因而在 Φ 上. #

note：此性质为反射群中，Φ 的定义式. (还差 $|W| < \infty$)

②. $|W| < \infty$.

Pf：Φ 生成 V，而 W 由 V 上反射生成，

⇒ W 在 Φ 上作用忠实.

又 $|\Phi| < \infty \Rightarrow |W| < \infty$.

note：由此，已得 W 为有限反射群，后面均可运用反射群结论。

4. 引用反射群中结论．

① 基础性质

(1) $\alpha\in\Pi$，$\beta\neq\alpha\in\Phi^+\Rightarrow S_\alpha\beta\in\Phi^+$，即 $S_\alpha(\Phi^+-\{\alpha\})=\Phi^+-\{\alpha\}$

(2) 任二正根系共轭，即 $\forall\Phi_1^+,\Phi_2^+$，$\exists w\in W$，s.t. $w\Phi_1^+=\Phi_2^+$

note：$\forall\Phi^+$，$w\Phi^+$ 仍可作为正根系

只须将字典序 $\{e_i\}$ 改为 $\{we_i\}$.

推论：$w\Phi_1^+=\Phi_2^+\Leftrightarrow w\Pi_1=\Pi_2$.

(3) $W\Pi=\Phi$.

note：引入距离函数 $\alpha=\sum n_i\alpha_i\Rightarrow ht\,\alpha=\sum n_i$

(4) $W=<S_\alpha\mid\alpha\in\Pi>$（简记 $S_\Pi=\{S_\alpha\mid\alpha\in\Pi\}$）

② 表达性质

(1). $\forall w\in W$，$w=s_1\cdots s_r$，$s_i\in\Pi$ s.t. r 取到最小值．

则称其为 w 的简约表达，并记 $w\doteq s_1\cdots s_r$

其中 r 称为 w 的长度，记 $l(w)=r$．称 l 为 length 函数．

(2) 令 $\Pi(w)=w\Phi^+\cap\Phi^-=\{\alpha\in\Phi^+\mid w\alpha<0\}$ 为 w 打入 Φ^- 的正根

令 $n(w)=|\Pi(w)|$，并称 n 为 n 函数

(3) $n\leq l$

③ 可删条件与 w_0

(1) 设 $w=s_1\cdots s_r$，令 $\begin{cases}\beta_r=\alpha_r\\ \beta_{r-1}=s_r\alpha_{r-1}\\ \vdots\\ \beta_1=s_r\cdots s_2\alpha_1\end{cases}$ （α_r 为 $s_r\in S_\Pi$ 对应单根）

则 $n(w)<r\Leftrightarrow\exists i$，$\beta_i<0$

$\Leftrightarrow\exists i<j$，s.t. $w=s_1\cdots\hat{s}_i\cdots\hat{s}_j\cdots s_r$.

note：$n(w)=r$ 时，$\Pi(w)=\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}$．其中 β_i 各不相同．

(2) 可见 $l(w)=n(w)$，因而可用 $n(w)$ 判断表达是否可约。

(3)，$\exists!\, w_0\in W$，s.t. $l(w_0)$ 取到最大，

且此时 $\begin{cases} o(w_0)=2, \\ w_0\Phi^+=\Phi^- \end{cases}$

Cpt4.3 weyl 群上的 coxeter 关系

Thm：令 $m_{ij}=o(s_i\cdot s_j)$，$s_i,s_j\in\Pi$

则 $W\cong F(\Pi)/\{(s_i\cdot s_j)^{m_{ij}}\}$

note：反射群中已证