

Cpt 6. Cartan 阵与 Dynkin 图.

Cpt 6.1. Cartan 矩阵.

研究是在 $V = \mathbb{R}^2$ 上的内积性质.

0. recall, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导 \mathbb{R}^2 上内积, $V = \mathbb{R}^2 = \langle \Phi \rangle$

π 为 V 基且 $c\alpha \in \Phi \Leftrightarrow c = \pm 1$

1. $\alpha, \beta \in \Phi$ 且 $\alpha \neq \pm\beta$, 则有.

$$(1) \theta(\alpha, \beta) \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$(2) \theta(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |\alpha| = |\beta| \\ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \Rightarrow |\alpha| : |\beta| = \sqrt{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow |\alpha| : |\beta| = \sqrt{3} \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{pf: } (1): \cos \theta = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha| |\beta|} \Rightarrow 4 \cos^2 \theta = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{|\alpha|^2} \cdot 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{|\beta|^2}$$

$$\text{又 } 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{|\alpha|^2}, 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{|\beta|^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \cos^2 \theta \in \mathbb{Z}$$

$$\text{又 } \alpha \neq \pm\beta \Rightarrow 0 < 4 \cos^2 \theta < 4$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 \theta \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow \theta \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

(2). 分类讨论.

$$\text{令 } a = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{|\alpha|^2}, b = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{|\beta|^2}. \text{ 则 } a \cdot b = 4 \cos^2 \theta \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{且 } \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$(1). a \cdot b = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ 此时 } \langle \alpha, \beta \rangle = 0$$

$$(2). a \cdot b = 1 \Rightarrow a = b = \pm 1 \Rightarrow \frac{|\beta|}{|\alpha|} = 1$$

$$(3). a \cdot b = 2 \Rightarrow a = \pm 2, b = \pm 1 \text{ 或 } a = \pm 1, b = \pm 2$$

$$\Rightarrow \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \sqrt{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(4). a \cdot b = 3 \text{ 同理 } \Rightarrow \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \sqrt{3} \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

推论: $\alpha \neq \beta \in \Pi \Rightarrow \theta(\alpha, \beta) \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

2. 令 $A_{ij} = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = 2 \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|} \cdot \cos(\alpha_i, \alpha_j)$, $A = (A_{ij})$

则 A 称为 Cartan 矩阵 (2 用于将 A 中元素均化为整数)

3. 性质:

①. $A_{ii} = 2, \forall i$

②. $A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}, \forall i \neq j$

③. $A_{ij} = -2$ 或 $-3 \Rightarrow A_{ji} = -1$

④. $A_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ji} = 0$

pf: $A_{ij} = 2 \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|} \cdot \cos(\alpha_i, \alpha_j)$ 中,

① $i=j \Rightarrow A_{ij} = 2$

② $i \neq j$ 时, $\alpha_i \neq \pm \alpha_j \Rightarrow \theta(\alpha_i, \alpha_j) \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

③ $\theta(\alpha_i, \alpha_i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A_{ij} = 0 = A_{ji}$

④: 论差角 $\theta(\alpha, \beta) \quad \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$

$2 \cos(\alpha, \beta) \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad 1 \quad (\sqrt{2})^{\pm 1} \quad (\sqrt{3})^{\pm 1}$

于是 $\theta(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow A_{ij} = -1$

$\theta(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow A_{ij} = -2$ 或 -1

$\theta(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow A_{ij} = -3$ 或 -1

note: 由定义, $A_{ij} = p - q$, 其中 q, p 为过 α_j 的 α_i 线条上下界

4. Π 取定后, \mathcal{L} 的 Cartan 矩阵在置换相似意义下唯一.

注: 相似过渡阵为置换阵, 简称为置换相似.

pf: Π 取不同次序, 得到 A 相差一个置换矩阵相似

Φ 取成根系 Π' , 则 $\exists w \in W, w\Pi = \Pi'$,

w 保内积, $\Rightarrow \{\alpha'_i = w\alpha_i\}$ 产生的 Cartan 阵与 $\{\alpha_i\}$ 相同.

例: 一个 Cartan 阵仅 (2)

二阶 Cartan 阵有 $\begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (折 $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$)
 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (折 $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$)

note: $\theta(\alpha, \beta) = \pi - \frac{\pi}{m} \Leftrightarrow o(\alpha \cdot \beta) = m$

于是:

$$\theta(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{2\pi}{3} \\ \frac{3\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow o(\alpha \cdot \beta) = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{cases}$$

即 $M = (m_{ij})$ 矩阵中, $m_{ij} \in \{2, 3, 4, 6\}$, $i \neq j$.

note2: Φ 与 A 相互确定, W 与 M 矩阵相互确定.

Φ 唯一确定 Weyl 群 W

pf: $W \Leftrightarrow M, \Phi \Rightarrow W, A$ 均显然.

$A \Rightarrow W \Rightarrow \Phi$ 仅是伸缩倍数 (反射群性质)

而由 A 定义, 知各边的比例关系 \neq

Ex 6.2. Dynkin 图.

1. 记 $n_{ij} = A_{ij} \cdot A_{ji} \Rightarrow n_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}, i \neq j$,

$$n_{ii} = 4$$

2. 绘图规则: 对 $\alpha_i, \alpha_j, i \neq j$.

当 $n_{ij} > 0$ 时, 将 α_i, α_j 连线, 重数为 n_{ij}

3. 将 Dynkin 图分为连通的几个分支 $T = \bigcup_i T_i$

依每一分支的序号, 得到 π 的划分: $\pi = \bigcup_i \pi_i$

依该序号, π 分解得到的 Cartan 阵为对角分块 $\begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & \ddots \\ & & & * \end{pmatrix}$

且 T 连通 \Leftrightarrow Cartan 阵分块仅有一个

pf: $\Leftrightarrow T_i$ 与 T_j 不相连 $\Rightarrow \langle \pi_i, \pi_j \rangle = 0 \Rightarrow$ 相应 A_{ij} 为 0.

故 A 分块化, 且各分块由 π_i 生成.

⇒: Cartan 阵有 2 个分块 ⇒ 分块对应的图不相连.

4. Dynkin 图的二次型.

下设 $\Pi = \{x_1, \dots, x_l\}$,

① 称 $Q(x_1, \dots, x_l) = 2 \sum_i x_i^2 - \sum_{i \neq j} T_{ij} x_i x_j$ 为 Dynkin 图的二次型

② 例: Dynkin 图, 二次型. 2

○	$2x_1^2$
○ ○	$2x_1^2 + 2x_2^2$
○ — ○	$2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2$
○ = ○	$2x_1^2 - 2\sqrt{2} x_1 x_2 + 2x_2^2$
○ ≡ ○	$2x_1^2 - 2\sqrt{3} x_1 x_2 + 2x_2^2$

③ 二次型 Q 对应的矩阵为 $B = (2ws(\alpha_i, \alpha_j))_{\alpha_i}$

Pf: 注意到 $n_{ij} = A_{ij} - A_{ji} = 4ws^2(\alpha_i, \alpha_j)$

当 $i \neq j$ 时, $ws(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0 \Rightarrow -T_{ij} = 2ws(\alpha_i, \alpha_j)$

当 $i = j$ 时, $ws(\alpha_i, \alpha_i) = 1$,

∴ $B = \begin{pmatrix} 2 & -T_{12} \\ -T_{21} & 2 \end{pmatrix} = (2ws(\alpha_i, \alpha_j))_{\alpha_i} \quad \#$

④. lemma: $\forall f = \sum_i x_i \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}, g = \sum_i y_i \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$
 $\Rightarrow \langle f, g \rangle = (x_1 \dots x_l) (ws(\alpha_i, \alpha_j)) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix}$

⑤. Q 为正定二次型

Pf: $\forall (x_1, \dots, x_l), \exists f = \sum_i x_i \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$,

则 $Q(x_1, \dots, x_l) = (x_1 \dots x_l) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$

$= 2 \langle f, f \rangle \geq 0$.

取 $f=0$ 当且仅当 $f=0$, 即 $x_1 = \dots = x_l = 0$. 故 Q 为正定二次型.

5. 我们希望, 对满足下述三条性质的 Dynkin 图分类.

(A): 图连通.

(B) 任二点之间, 边重数为 0, 1, 2 或 3.

(C) 相长二次型 $Q(x_1, \dots, x_l)$ 正定

note: 任一单 Lie 代数的 Dynkin 图满足 (B), (C).

Ex 6-3. Dynkin 图分类定理.

1. Thm: 以下 6 族 Dynkin 图满足条件 (A), (B), (C).

(1) A 族: $\circ, \circ\text{---}\circ, \circ\text{---}\circ\text{---}\circ, \dots$
 A_1, A_2, A_3, \dots

(2) B 族: $\circ\text{---}\circ, \circ\text{---}\circ\text{---}\circ, \circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ, \dots$
 B_2, B_3, B_4, \dots

(3) D 族: $\circ\text{---}\circ\text{---}\circ, \circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ, \circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ, \dots$
 D_4, D_5, D_6, \dots

(4) E 族: $\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ, \circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ, \circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ$
 E_6, E_7, E_8

(5) F 族: $\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ$
 F_4

(6) G 族: $\circ\text{---}\circ$
 G_2

note: 其中 A, B, D 族为无限族,
E, F, G 族为有限族.

pf: 只须证正定性. 即顺序主子式大于零.

对长度归纳.

$l=1 \Rightarrow T=A_1 \Rightarrow Q(x_1) = 2x_1^2$ 正定

$$l=2 \Rightarrow T = \begin{cases} A_2 \Rightarrow Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ B_2 \Rightarrow Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 + x_2^2 \\ G_2 \Rightarrow Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + x_2^2 \end{cases}$$

$l \geq 3$ 时, 观察可知, T_l 至少存在一点 P_l

s.t. P_l 仅与 T 中一点相连, 且边的重数为 1

记 P_l 相连的点为 P_{l-1} ,

该编号下, 二次型 Q 的矩阵为 $\begin{pmatrix} * & * & \dots \\ * & 2 & -1 \\ \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{于是 } \det T_l = 2 \det T_{l-1} - \det T_{l-2}$$

其中 T_{l-1} 由 T_l 去掉点 P_l 得到

T_{l-2} 由 T_{l-1} 去掉点 P_{l-1} 得到.

下边具体计算各族 Dynkin 图二次型矩阵的行列式.

①. A 族:

$$\det A_1 = 2, \det A_2 = 3, \det A_l = 2 \det A_{l-1} - \det A_{l-2}$$

$$\Rightarrow \det A_l = l+1$$

② B 族:

$$\det B_2 = 2, \det B_3 = 2 \det B_2 - \det A_1 = 2$$

$$\det B_l = 2 \det B_{l-1} - \det B_{l-2}$$

$$\Rightarrow \det B_l = 2$$

③ D 族

$$\det D_4 = 2 \det A_3 - \begin{vmatrix} 2 & \\ & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\det D_5 = 2 \det D_4 - \det D_3 = 4$$

$$\det D_l = 2 \det D_{l-1} - \det D_{l-2}$$

$$\Rightarrow \det D_l = 4$$

④. E 族.

$$\det E_6 = 2 \det D_5 - \det A_4 = 3$$

$$\det E_7 = 2 \det E_6 - \det D_5 = 2$$

$$\det E_8 = 2 \det E_7 - \det E_6 = 1$$

(5) F 族

$$\det F_4 = 2 \det B_3 - \det A_2 = 1$$

(6) G 族

$$\det G_2 = 1$$

故各族 Dynkin 图的行列式大于零。

而 T_L 的子式为其去若干点得到的子图, (可能不连通)

因为为若干低阶 T 连通子图行列式的乘积, 故仍大于零。

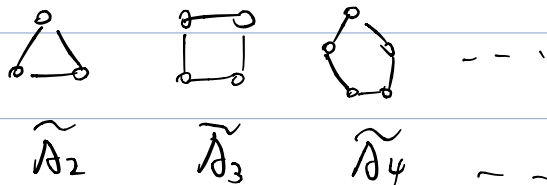
综上, T_L 二次型正定. #

$$\text{非负: } \begin{cases} \det A_L = L+1 \\ \det B_L = 2 \\ \det D_L = 4 \end{cases}$$

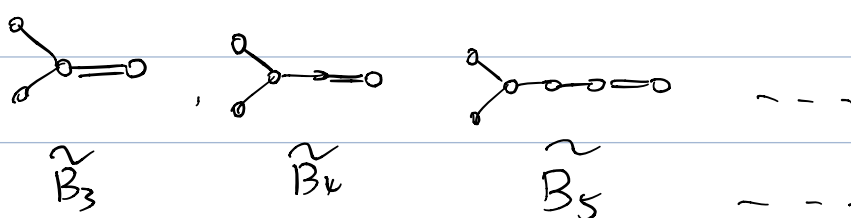
$$\text{有限: } \begin{cases} \det E_6 = 3, \det E_7 = 2, \det E_8 = 1 \\ \det F_4 = 1 \\ \det G_2 = 1 \end{cases}$$

2. Thm: 以下 7 族 Dynkin 图的行列式均为零。

(1) \tilde{A} 族:



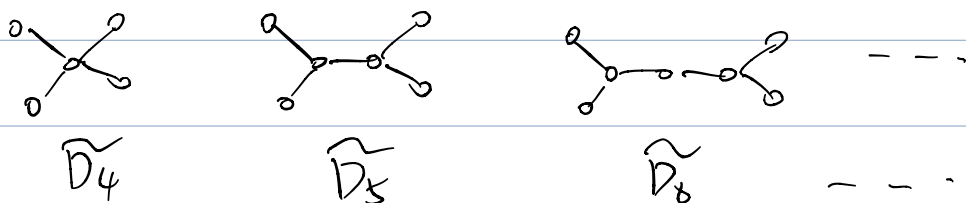
(2) \tilde{B} 族:



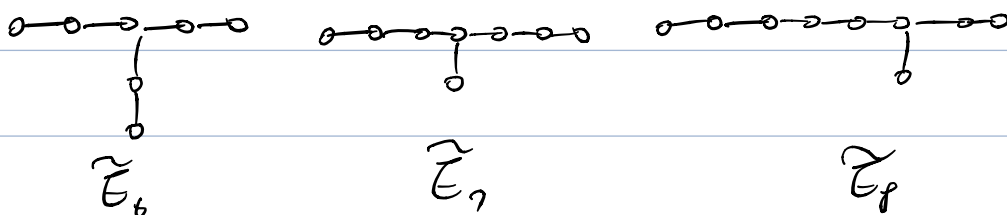
(3) \tilde{C} 族:



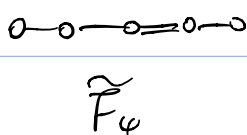
④. \tilde{B} 族:



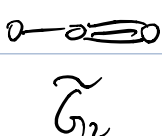
⑤. \tilde{E} 族:



⑥. \tilde{F} 族:



⑦. \tilde{G}_2 族:



note: 其低阶顺序子式大于零, \Rightarrow 半正定, 且重特征值一重.

pf: ①. 先考虑 \tilde{A}_l , 其二次型为

$$Q(x_1, \dots, x_{l+1}) = 2 \sum_{i=1}^l x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^l x_i x_{i+1}$$

$\Rightarrow Q(1, \dots, 1) = 0$, 即其有重特征值. $\#$

②. 考虑其它几族, 观察可知, T_l 至少存在一点 p_{l+1}

s.t. p_{l+1} 仅与某一点相连, 且相连的重数为 1 或 2.

记该点为 p_l , 相应排序得.

$$T_l \text{ 的 Cartan 矩阵为 } \begin{pmatrix} * & * & \vdots & 0 \\ * & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} * & * & \vdots & 0 \\ * & 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det T_l = 2 \det T_{l-1} - \det T_{l-2}$$

$$\text{或 } \det T_l = 2 \det T_{l-1} - 2 \det T_{l-2}$$

$$\text{ii). } \tilde{B} \text{ 族: } \det \tilde{B}_3 = 2 \det A_3 - 2(\det A_1)^2 = 8 - 8 = 0$$

$$\det \tilde{B}_4 = 2 \det D_4 - 2 \det A_3 = 8 - 8 = 0$$

$$\det \tilde{B}_1 = 2 \det D_1 - 2 \det D_{L-1} = f - f = 0$$

$$(2) \tilde{C} \text{族: } \det \tilde{C}_2 = 2 \det B_2 - 2 \det A_1 = 4 - 4 = 0$$

$$\det \tilde{C}_1 = 2 \det B_1 - 2 \det B_{L-1} = 4 - 4 = 0$$

$$(3) \tilde{D} \text{族: } \det \tilde{D}_4 = 2 \det D_4 - (\det A_1)^3 = f - f = 0$$

$$\det \tilde{D}_5 = 2 \det D_5 - (\det A_1) \cdot (\det A_3) = f - f = 0.$$

$$\det \tilde{D}_L = 2 \det D_L - (\det A_1) \cdot (\det D_{L-2}) = f - f = 0$$

$$(4) \tilde{E} \text{族: } \det \tilde{E}_6 = 2 \det E_6 - \det A_5 = 6 - 6 = 0$$

$$\det \tilde{E}_7 = 2 \det E_7 - \det D_6 = 4 - 4 = 0$$

$$\det \tilde{E}_8 = 2 \det E_8 - \det E_7 = 2 - 2 = 0$$

$$(5) \tilde{F} \text{族: } \det \tilde{F}_4 = 2 \det F_4 - \det B_3 = 2 - 2 = 0$$

$$(6) \tilde{G} \text{族: } \det \tilde{G}_2 = 2 \det G_2 - \det A_1 = 0.$$

note: 不生圈的图均可用同样的求得行列式.

3. 称 T' 为 T 子图, 若 T' 由 T 去掉若干点, 或某些边降重数得到.

若 T 满足条件 (A), (B), (C), 则 T' 亦满足 (A), (B), (C)

pf: 只需证正定性, 设 Q, Q' 分别为 T, T' 关联的二次型.

由正定 \Rightarrow 主子式正定, 知, T 去若干点得到的子图正定.

故不妨设 T' 与 T 有相同多的点, 且 $n_{ij}' \leq n_{ij}$

$$Q'(x_1, \dots, x_L) = 2 \sum_i x_i^2 - \sum_{i \neq j} \overline{n_{ij}'} x_i x_j$$

$$\geq 2 \sum_i |x_i|^2 - \sum_{i \neq j} \overline{n_{ij}'} |x_i| \cdot |x_j|$$

$$\geq 2 \sum_i |x_i|^2 - \sum_{i \neq j} \overline{n_{ij}} |x_i| \cdot |x_j|$$

$$= Q(|x_1|, \dots, |x_L|) \geq 0$$

又正定 \Rightarrow 取非零且仅当 $|x_1| = \dots = |x_L| = 0$, 即 $x_1 = \dots = x_L = 0$.

$\Rightarrow Q'$ 正定. \square

4. Thm: T 满足 (A), (B), (C), 当且仅当 T 属于 A-G 族.

具体地, 有以下命题

(1) Γ 不含圈

(2) Γ 含三重边 $\Rightarrow \Gamma$ 为 G_2

(3) Γ 含二重边 $\Rightarrow \Gamma$ 属于 B 族或 F_4

(4) Γ 含分叉 $\Rightarrow \Gamma$ 属于 D 或 E_6, E_7, E_8 .

pf: 反证法已知. 已知 Γ 不以 A - \tilde{G} 族中元素为子图

(1) Γ 不以 A 族为子图 $\Rightarrow \Gamma$ 不含圈

(2) Γ 含三重边, Γ 不以 \tilde{G}_2 为子图 $\Rightarrow \Gamma$ 为 G_2

(3) Γ 含二重边 \Rightarrow 二重边无邻边, 否则含 \tilde{C} 族子图.

(2) Γ 不含分叉, 否则含 \tilde{B} 族子图.

(3) 若二重边两侧均有边,

由 Γ 不含 $\tilde{F}_4 \Rightarrow \Gamma$ 为 F_4

若二重边无邻边一侧有边 $\Rightarrow \Gamma$ 为 B 族元素.

(4) Γ 含分叉 \Rightarrow 分叉点仅有 3 个分支, 否则含 \tilde{D} 族子图

(2) Γ 只含一个分叉, 否则含 \tilde{D} 族子图.

(3) 设分叉点的 3 个分支长为 l_1, l_2, l_3 , 且 $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq 1$

则必有 $l_3 = 1$, 否则 Γ 含 \tilde{E}_6 子图.

必有 $l_2 \leq 2$, 否则 Γ 含 \tilde{E}_7 子图

$l_2 = 1$ 时, Γ 为 D 族元素.

$l_2 = 2$ 时, Γ 为 E_6, E_7 或 E_8 . 否则 Γ 含 \tilde{E}_8 子图.

(5) 若 Γ 不含三重边, 二重边, 分叉, 圈, 则 Γ 为 A 族元素.

综上, Γ 满足 (A), (B), (C) 条件 当且仅当 Γ 为 A-G 族元素.

note: 证明过程实际上也是分类的推导过程

lemma: Γ 正立 $\Rightarrow \Gamma$ 子图 正立.

作证: 设 Γ 为半单 Lie 代数的 Dynkin 图, 则 Γ 为 A-G 族元素.

pf: Γ 满足 (A), (B), (C). 立证.

Ch 6-4. Cartan 矩阵 分类.

1. 由 $n_{ij} = A_{ij} \cdot A_{ji}$, Cartan 矩阵 与 有向 Dynkin 图.

$$\text{反之不然: } n_{ij} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow A_{ij} = A_{ji} = 0 \\ 1 & \Rightarrow A_{ij} = A_{ji} = -1 \\ 2 & \Rightarrow \begin{cases} A_{ij} = -2 \\ A_{ji} = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} A_{ij} = -1 \\ A_{ji} = -2 \end{cases} \\ 3 & \Rightarrow \begin{cases} A_{ij} = -3 \\ A_{ji} = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} A_{ij} = -1 \\ A_{ji} = -3 \end{cases} \end{cases}$$

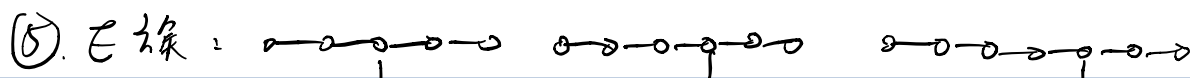
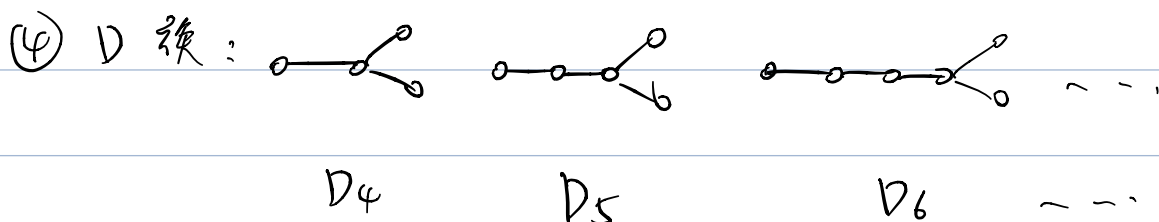
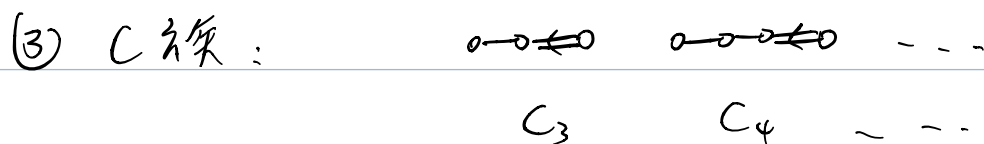
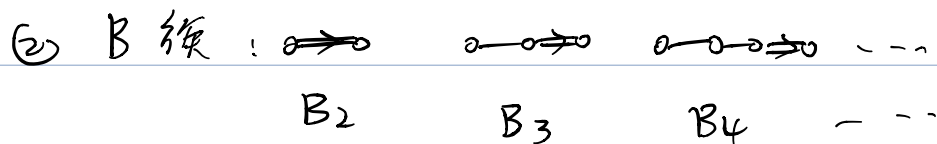
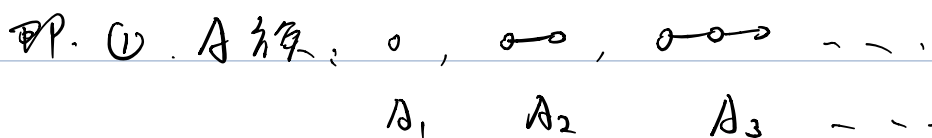
即 $n_{ij} = 2, 3$ 时, A_{ij} 的确定存在 2 种情况.

$$\text{由 } A_{ij} = 2 \cdot \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|} \cdot \cos(\alpha_i, \alpha_j) \Rightarrow |A_{ji}| > |A_{ij}| \text{ iff } |\alpha_i| > |\alpha_j|$$

$$\text{因为, 记 } \overset{\text{---}}{\underset{i}{\circ}} \overset{\text{---}}{\underset{j}{\circ}}, n_{ij} = 2, |\alpha_i| > |\alpha_j|, |A_{ji}| > |A_{ij}|$$

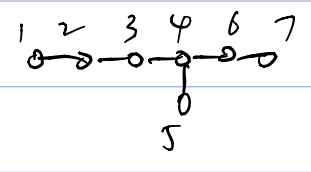
$$\overset{\text{---}}{\underset{i}{\circ}} \overset{\text{---}}{\underset{j}{\circ}}, n_{ij} = 3, |\alpha_i| > |\alpha_j|, |A_{ji}| > |A_{ij}|$$

2. 相应地, 建立 Cartan 矩阵 与 有向 Dynkin 图 的一一对应.

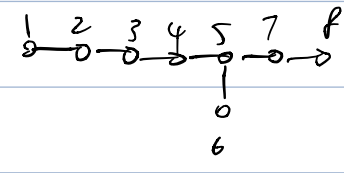


$$\begin{pmatrix} & -1 & 2 & 0 & & & & \\ & & -1 & 0 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & & & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & & & & -1 & 0 & 2 & -1 \\ & & & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

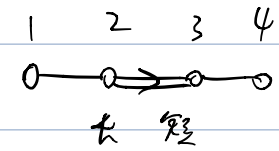
$$E_7 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & -1 & & & & & \\ & & & -1 & 2 & 0 & & & & & \\ & & & & -1 & 0 & 2 & -1 & & & \\ & & & & & & & -1 & 2 & & \end{pmatrix}$$



$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & -1 & & & & \\ & & & & -1 & 2 & 0 & & & & \\ & & & & & -1 & 0 & 2 & -1 & & \\ & & & & & & & & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

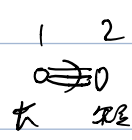


$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -2 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$



(双箭头对应在行位置大)

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$



note: 第 i 行共 k 项为负 \Rightarrow p 点连接了 k 条边.

负项为 -1, -2, -3 分别对应一, 二, 三重边.

4. 下设 L 半单, 且有分解 $L = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} L_{\alpha}$, [Φ 为 L 关于 \mathfrak{h} 的 Dynkin 图]

(1) $\forall 0 \neq l \in L$, 有 $l \cap \mathfrak{h} \neq 0$.

pf: 反设 $l \cap \mathfrak{h} = 0 \Rightarrow \forall 0 \neq x \in l$, 有 $x = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Phi} \mu_{\alpha} e_{\alpha}$, 且 μ_{α} 不全为 0.

取其中 μ_{α} 的非零个数取到最小, 下也从中导出矛盾

$$\begin{aligned} \text{不妨设 } \mu_{\beta} \neq 0 &\Rightarrow [h_{\beta}, x] = \sum_{\alpha \in \Phi} \mu_{\alpha} [h_{\beta}, e_{\alpha}] \\ &= \sum_{\alpha \in \Phi} \mu_{\alpha} \alpha(h_{\beta}) \cdot e_{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{取 } e_{-\beta}, \text{ s.t. } h_{\beta} = [e_{\beta}, e_{-\beta}] &\Rightarrow [h_{\beta}, x] e_{-\beta} = \sum_{\alpha \in \Phi} \mu_{\alpha} \alpha(h_{\beta}) \cdot [e_{\alpha}, e_{-\beta}] \\ &= \mu_{\beta} \beta(h_{\beta}) h_{\beta} + \sum_{\alpha \neq \beta} \mu_{\alpha} \alpha(h_{\beta}) \mu_{\alpha, -\beta} e_{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

又 $\mu_\beta \cdot \rho(h_\beta) - h_\beta \neq 0, \Rightarrow \sum_{\alpha \neq \beta} \mu_\alpha \rho(h_\beta) \mu_{\alpha-\beta} e_{\alpha-\beta}$ 中非零子数小于 α 的。
与 $[(h_\beta' x) e_{-\beta}] \in I$ 矛盾。#

note: 正向证明: 取 $0 \neq x = h + \sum \mu_\alpha e_\alpha \in I$,

若 μ_α 均重, 则 h 即所求。

若 μ_α 不全为重, 同上过程, 可将 $\sum \mu_\alpha e_\alpha$ 中非重 μ_α 数严格减少
并保持 h 部分不为重, 有限步后即得所求。

note 2: 反设更小性, 将归纳证明转为同谬证明 (常用数学技巧)

$$\textcircled{2}. \forall \alpha \in \Phi, \langle h_\alpha', I \cap H \rangle \neq 0 \Leftrightarrow e_\alpha, e_{-\alpha} \in I \Leftrightarrow h_\alpha' \in I$$

pf: 设 $h_\alpha' = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$

$$\textcircled{1} \langle h_\alpha', I \cap H \rangle \neq 0 \Rightarrow \exists x \in I \cap H, \langle h_\alpha', x \rangle \neq 0$$

$$\Rightarrow [x, e_\alpha] = \alpha(x) \cdot e_\alpha = \langle h_\alpha', x \rangle e_\alpha \in I$$

$$\text{又 } \langle h_\alpha', x \rangle \neq 0 \Rightarrow e_\alpha \in I, \text{ 同理 } e_{-\alpha} \in I$$

$$\textcircled{2} e_\alpha, e_{-\alpha} \in I \Rightarrow h_\alpha' = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \in I.$$

$$\textcircled{3} \text{ 由 } h_\alpha' \in I \text{ 且 } \langle h_\alpha', h_\alpha' \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle h_\alpha', I \rangle \neq 0.$$

note: 章节末尾, 第一个等号号可能有更好情形, 即 " $h_\alpha' \in I \Leftrightarrow e_\alpha \in I \Leftrightarrow e_{-\alpha} \in I$ "

作论: $I \triangleleft L, H \subseteq I \Rightarrow I = L$

③ Γ (连通) $\Rightarrow L$ 为单 Lie 代数

note: 简记 $H_\pi = \{ h_\alpha' \mid \alpha \in \pi \}$

pf: 由 L 半单, \Rightarrow 只须证 L 只有平凡理想。

即 $\forall 0 \neq I \triangleleft L$, 有 $I = L$ 。

由上也作论, 只须证 $H \subseteq I$,

反设 $H \not\subseteq I$, 由 $\cup, 0 \neq I \cap H \neq H$

将 π 作如下划分: $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$,

$$\pi_1 = \{ \alpha \in \pi \mid \langle h_\alpha', I \rangle = 0 \}$$

$$\pi_2 = \{ \alpha \in \pi \mid \langle h_\alpha', I \rangle \neq 0 \}$$

$\pi_1 \not\subset \pi$, 否则 $\langle H_{\pi}, 1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle H, 1 \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle H, 1 \cap H \rangle = 0 \Rightarrow 1 \cap H = 0$ 矛盾

$\pi_2 \not\subset \pi$, 否则 $\langle h_{\alpha'}, 1 \rangle \neq 0, \forall \alpha \in \Phi \Rightarrow h_{\alpha'} \in 1 \Rightarrow H \subseteq 1$, 矛盾.

于是 π 可分解为不相交的两部分 π_1, π_2 ,

且 S_{π_1} 与 S_{π_2} 正交. 与 Dynkin 图连通矛盾.

note 1: $\forall \alpha \neq \beta \in \Phi, S_{\alpha}, S_{\beta}$ 交换 $\Leftrightarrow o(S_{\alpha}, S_{\beta}) = 2$

$$\Leftrightarrow \theta(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \langle h_{\alpha'}, h_{\beta'} \rangle = 0$$

上述结论 $\Rightarrow \langle H_{\pi_1}, H_{\pi_2} \rangle = 0 \Rightarrow S_{\pi_1}$ 与 S_{π_2} 正交

note 2: Dynkin 图连通 \Leftrightarrow Cartan 矩阵分块化仅一个

$\Leftrightarrow \pi$ 的正交划分仅一个.

(由于 Dynkin 图与 Cartan 矩阵均用 π 定义的, 前也已讨论过)

5. Γ 非连通与相关划分

①. 内积延拓

设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 \mathbb{R}^n 上内积. 则可通过如下公式, 将 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 延拓到 \mathbb{C}^n 上.

$$\text{令 } \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i) \mapsto \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle + i \langle b_1, a_2 \rangle - i \langle a_1, b_2 \rangle$$

则 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 满足: \forall 双线性性

$$\text{(2) 共轭对称性: } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\text{(3) 正定性: } \langle x, x \rangle \geq 0, \text{ 取等当且仅当 } x=0.$$

于是 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 作成 \mathbb{C}^n 上内积

note: Killing 型定义中, $\langle x, y \rangle = \text{tr}(ad_x \cdot ad_y) = \text{tr}(ad_y \cdot ad_x) = \langle y, x \rangle$

即仅有对称性而没有共轭性,

因而不能直接将其限制在 \mathbb{H}^* 上得 \mathbb{H}^* 内积.

又: 能否调整 Killing 型定义来修缮这点?

(2) 前边已得, w 群 W 为 H^* 上变换群, 即 $W \subseteq gl(H^*)$.

1) 由对偶空间性质, $gl(H)$ 与 $gl(H^*)$ 关于转置存在反同构
关于逆步表示为同构

考虑逆步表示, 即得 W 对 H 的作用.

(2) 利用对偶对, 亦可得到 W 对 H 作用.

$$\forall w \in W, \text{ 令 } w: H \rightarrow H \\ h \mapsto wh$$

$$\text{其中 } H^*(wh) = w^{-1}H^*(h),$$

由对偶空间性质 $\Rightarrow wh$ 唯一确定. 即良定义.

(3) w 在 H 上作用与 H 到 H^* 同构相若.

$$\text{即 } \begin{array}{ccc} H^* & \xrightarrow{(\lambda \mapsto h'_\lambda)} & H \\ w \downarrow & & \downarrow w \\ H^* & \xrightarrow{(\lambda \mapsto h'_\lambda)} & H \end{array} \text{ 为交换图, } \forall w \in W$$

pf: 即证 $wh'_\lambda = h'_w\lambda$

$$\begin{aligned} H^*(wh'_\lambda) &= w^{-1}H^*h'_\lambda \quad \downarrow h'_\lambda \in \lambda \\ &= \langle w^{-1}H^*, \lambda \rangle \quad \downarrow w \text{ 保 } H^* \text{ 上内积} \\ &= \langle H^*, w\lambda \rangle \\ &= H^*(h'_w\lambda) \quad \# \end{aligned}$$

note1: 由上述交换图, w 之于 H^* 与 H 可视为等同.

note2: 由 w 交换性知, w 亦保 H 上内积

(3) L 半单, 其 Dynkin 图 Γ 有连通分支 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$

例: $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$, L_i 为单 Lie 代数

且 L_i 的 Dynkin 图为 Γ_i .

pf: 设 $\Gamma = \dot{\bigcup}_{i=1}^r \Gamma_i \Rightarrow \pi = \dot{\bigcup}_i \pi_i$ 为正交划分

$\Rightarrow S_{\pi_i}$ 与 S_{π_j} 交换, ($i \neq j$) (这里 S_{π_i} 视为 H 上)

令 $V_i = \langle \pi_i \rangle$, $V = \langle \pi \rangle \Rightarrow V = \bigoplus_i V_i$ 为正交分解

令 $H_i = \langle h_{\pi_i} \rangle \Rightarrow H = \bigoplus_{i=1}^r H_i$, 为正交分解.

令 $\mathfrak{g}_i = W\pi_i \Rightarrow \mathfrak{g} = \bigcup \mathfrak{g}_i$

考虑 $W = \langle \bigcup S_{\pi_i} \rangle$ 在 H_i 上作用.

Weyl 群性质 $\Rightarrow S_{\pi_i} H_i = H_i$

$\pi_i \perp \pi_j \Rightarrow h_{\pi_i} \perp H_j$ ($i \neq j$) $\left. \begin{array}{l} \text{S}_{\pi_i} \text{ 为 } h_{\pi_i} \text{ 生成的反射} \\ \Rightarrow \text{S}_{\pi_i} \text{ 在 } H_j \text{ 上作用平凡.} \end{array} \right\}$

$\Rightarrow WH_i = H_i$

$\Rightarrow \mathfrak{g}_i = \{ \alpha \mid h_{\alpha'} \in H_i \}$

$\Rightarrow \mathfrak{g}_i = \langle \pi_i \rangle \cap V_i$, $\mathfrak{g} = \bigcup \mathfrak{g}_i$ 为正交划分.

令 L_i 由 H_i 及 $\mathfrak{g}_i = \{ e_{\alpha} \mid \alpha \in \mathfrak{g}_i \}$ 张成

$\Rightarrow L = \bigoplus L_i$, 为子空间的直和分解

下证 L_i 为所求直和分解

先证 $L_i \subseteq L$, 只需证 $[e_{\alpha}, e_{\beta}] \in L_i$, $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}_i$

若 $\alpha + \beta \notin \mathfrak{g}$, 显然成立.

若 $\alpha + \beta \in \mathfrak{g} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathfrak{g}_i$ (由于 $\alpha, \beta \in V_i$, $\mathfrak{g}_i = V_i \cap \mathfrak{g}$)

$\Rightarrow e_{\alpha+\beta} \in L_i$.

再证 $[L_i, L_j] = 0$, 于是可得 $L_i \subseteq L$.

$\forall \alpha \in \mathfrak{g}_i, \beta \in \mathfrak{g}_j$, 且 $i \neq j$, 有

$[h_{\alpha'}, e_{\beta}] = \beta(h_{\alpha'}) e_{\beta} = \langle h_{\alpha'}, h_{\beta'} \rangle e_{\beta} = 0$, 同理 $[e_{\alpha}, h_{\beta'}] = 0$.

由空间性质, $\alpha + \beta$ 不落在任一 V_i 中

$\Rightarrow \alpha + \beta \notin \mathfrak{g} \Rightarrow [e_{\alpha}, e_{\beta}] = 0$

(note: 空间直和 + 理想 \Rightarrow Lie 代数直和)

其次, 证 $L_i = H_i \oplus \sum_{\alpha \in \mathfrak{g}_i} C e_{\alpha}$ 为 Cartan 分解

H_i 交换 \Rightarrow 幂零

$\forall x \in L_i$ s.t. $x \in N(H_i) \Rightarrow [x, H_i] \subseteq H_i$

$\& [x, H_i] = 0 \Rightarrow [x, H_i] \subseteq H_i$

$\Rightarrow x \in N(H_i) = H_i$

$\& H_i = L_i \cap H \Rightarrow x \in H_i$

最后. 若 L_i 的 Dynkin 图.

注意到 $\pi_i \subseteq \mathfrak{g}$; 为其正根子 $\Rightarrow \Gamma_i$ 为其 Dynkin 图.

推论: 半单 Lie 代数 L 为单 Lie 代数 $\Leftrightarrow L$ 的 Dynkin 图 (连通)

推论 2: L 半单, $I \rightarrow L$, 则 $h_\alpha \in I \Leftrightarrow e_\alpha \in I \Leftrightarrow e_{-\alpha} \in I$

note: $\Gamma = \dot{\bigcup} \Gamma_i$ 连通图

$\Rightarrow \pi = \dot{\bigcup} \pi_i$ 正交划分

$\Rightarrow V = \dot{\bigoplus} V_i$ 正交分解, $V_i = \langle \pi_i \rangle$

$S_\pi = \dot{\bigcup} S_{\pi_i}$ 交换划分

$\Rightarrow H = \dot{\bigoplus} H_i$ 正交分解, $H_i = \langle h_{\pi_i} \rangle$

$\Rightarrow \mathfrak{g} = \dot{\bigoplus} \mathfrak{g}_i$ 正交划分, $\mathfrak{g}_i = V_i \cap \mathfrak{g}$

$\Rightarrow L = \dot{\bigoplus} L_i$ 为相应 Lie 代数分解