Cpt7. 存在唯一性定理.

前面已得, 任一半单 Lie 代数 L, L 有单分解 $L=\bigoplus_{i=1}^{r}L_i$ 当且仅当

L 的 Dynkin 图为 $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{r}\Gamma_i$, Γ_i 连通且 L_i 的 Dynkin 图为 Γ_i

现考虑其反命题. 即任一连通 Dynkin 图 Γ, 同构意义下存在唯一相应的单 Lie 代数.

Cpt7.1 一些结构常数性质.

1. 令 $h_\alpha=\dfrac{2h_\alpha'}{\langle h_\alpha',h_\alpha'\rangle}$, 则 $\alpha(h_\alpha)=\langle h_\alpha,h_\alpha'\rangle=2$.

对 $\{e_\alpha\mid\alpha\in\Phi^+\}$ 给出, $\exists!\{e_{-\alpha}\mid\alpha\in\Phi^+\}$ s.t. $h_\alpha=[e_\alpha\cdot e_{-\alpha}]$, $\alpha\in\Phi^+$

且此时, 右式对 $\alpha\in\Phi^-$ 亦成立

特别地, 下取 ..., 简记 h_{α_i} 为 h_i

note: $h_{\alpha+\beta}'=h_\alpha'+h_\beta'$

但 $h_{\alpha+\beta}=2\dfrac{h_{\alpha+\beta}'}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}\neq h_{\alpha+\beta}=h_\alpha+h_\beta\ \left(=2\dfrac{h_\alpha'}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+2\dfrac{h_\beta'}{\langle\beta,\beta\rangle}\right)$

2. $\alpha\neq-\beta$ 时, 设 $N_{\alpha,\beta}$ 使得 $[e_\alpha e_\beta]=N_{\alpha,\beta}e_{\alpha+\beta}$, 并称 $N_{\alpha,\beta}$ 为结构常数.

note: 给出 $N_{\alpha,\beta}$ 时即隐含 $\alpha\neq-\beta$ 条件.

$\alpha+\beta\notin\Phi$ 时, $N_{\alpha,\beta}=0$. 有时会把这部分值排出 $N_{\alpha,\beta}$ 定义.

3. Prop: $N_{\alpha,\beta}$ 有以下性质

① $N_{\beta,\alpha}=-N_{\alpha,\beta}$

pf: $N_{\alpha,\beta}e_{\alpha+\beta}=[e_\alpha e_\beta]=-[e_\beta e_\alpha]=-N_{\beta,\alpha}e_{\alpha+\beta}$ #

② $\alpha,\beta,\gamma\in\Phi$ s.t. $\alpha+\beta+\gamma=0$, 则 $\dfrac{N_{\alpha,\beta}}{\langle\gamma,\gamma\rangle}=\dfrac{N_{\beta,\gamma}}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\dfrac{N_{\gamma,\alpha}}{\langle\beta,\beta\rangle}$

pf: 由 Jacobi 之性质

$[[e_\alpha e_\beta]e_\gamma]+[[e_\beta e_\gamma]e_\alpha]+[[e_\gamma e_\alpha]e_\beta]=0$ 　 $\alpha+\beta+\gamma=0$

$\Rightarrow N_{\alpha,\beta}[e_{-\gamma}\ e_\gamma]+N_{\beta,\gamma}[e_{-\alpha}\ e_\alpha]+N_{\gamma,\alpha}[e_{-\beta},e_\beta]=0$

$\Rightarrow N_{\alpha,\beta}\cdot\dfrac{2h_\gamma'}{\langle\gamma,\gamma\rangle}+N_{\beta,\gamma}\dfrac{2h_\alpha'}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+N_{\gamma,\alpha}\cdot\dfrac{2h_\beta'}{\langle\beta,\beta\rangle}=0$

又 $\gamma=-(\alpha+\beta)\Rightarrow h_\gamma'=-h_\alpha'-h_\beta'$

$$\Rightarrow \left(\frac{N_{\beta,\gamma}}{\langle\alpha,\alpha\rangle}-\frac{N_{\alpha,\beta}}{\langle\gamma,\gamma\rangle}\right)\cdot h_\alpha' + \left(\frac{N_{\gamma,\alpha}}{\langle\beta,\beta\rangle}-\frac{N_{\alpha,\beta}}{\langle\gamma,\gamma\rangle}\right) h_\beta' = 0$$

由 $\alpha+\beta=-\gamma\in\Phi \Rightarrow \alpha,\beta$ 线性无关

$\Rightarrow$ 系数为零. #

推论：若 $\alpha+\beta\in\Phi$，则 $N_{-\alpha-\beta,\alpha}=\dfrac{\langle\beta,\beta\rangle}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}\cdot N_{\alpha,\beta}$

即已知 $N_{\alpha,\beta} \Rightarrow N_{\alpha,-\alpha-\beta}$，此时尚不能完成递推式.

4、$N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}$ 计算

① 记 $a(\alpha,\beta)=N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}\cdot\dfrac{\langle\beta,\beta\rangle}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}$，则有

(1) $\beta\pm\alpha\notin\Phi \Rightarrow \langle\beta,\alpha\rangle=0$.

(2) $\beta\pm\alpha\in\Phi \Rightarrow 2\dfrac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=a(\alpha,\beta)-a(\alpha,-\alpha+\beta)$

(3). $\beta+\alpha\in\Phi$, $\beta-\alpha\notin\Phi \Rightarrow 2\dfrac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=a(\alpha,\beta)$ (走到下界)

(4) $\beta-\alpha\in\Phi$, $\beta+\alpha\notin\Phi \Rightarrow 2\dfrac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=-a(\alpha,-\alpha+\beta)$ (走到上界)

Pf: (1). 由 $2\dfrac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=p-q$ 立得.

(2)

$$-\alpha+\beta\in\Phi \Rightarrow N_{-\alpha,\beta}=\frac{\langle-\alpha+\beta,-\alpha+\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}\cdot N_{\alpha-\beta,-\alpha},\quad N_{-\alpha+\beta,\alpha}=-N_{\alpha,-\alpha+\beta}$$

$$\alpha+\beta\in\Phi \Rightarrow N_{\alpha+\beta,-\alpha}=\frac{\langle\beta,\beta\rangle}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}N_{-\alpha,-\beta},\quad N_{\beta,\alpha}=-N_{\alpha,\beta}$$

由 Jacobi 知，$[[e_\alpha e_{-\alpha}]e_\beta]+[[e_{-\alpha}e_\beta]e_\alpha]+[[e_\beta e_\alpha]e_{-\alpha}]=0$

$$\Rightarrow 2\frac{[h_\alpha',e_\beta]}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+N_{-\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha+\beta,\alpha}\cdot e_\beta+N_{\beta,\alpha}\cdot N_{\alpha+\beta,-\alpha}\cdot e_\beta=0$$

$$\Rightarrow \left(2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+N_{-\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha+\beta,\alpha}+N_{\beta,\alpha}\cdot N_{\alpha+\beta,-\alpha}\right)e_\beta=0$$

$$\Rightarrow 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}+N_{-\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha+\beta,\alpha}+N_{\beta,\alpha}\cdot N_{\alpha+\beta,-\alpha}=0$$

$$\Rightarrow 2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=N_{\alpha,\beta}\cdot N_{\alpha+\beta,-\alpha}+N_{\alpha,-\alpha+\beta}\cdot N_{-\alpha,\beta}$$

$$=N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}\cdot\frac{\langle\beta,\beta\rangle}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}-N_{\alpha,-\alpha+\beta}\cdot N_{-\alpha,\alpha-\beta}\frac{\langle-\alpha+\beta,-\alpha+\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}$$

(3), (4) 同 (2).

②：若有 α 链串：$-p\alpha+\beta, \cdots, \beta, \cdots, q\alpha+\beta$，则 $a(\alpha,\beta) = -(p+1)q$.

pf：记 $k\alpha+\beta = \gamma_k$，$k=0,1,\cdots,p$

则 $-p<k<q$ 时，$\gamma_k \pm \alpha \in \Phi$

$k=q$ 时，$\gamma_k+\alpha \notin \Phi$，$\gamma_k - \alpha \in \Phi$

$k=-p$ 时，$\gamma_k-\alpha \notin \Phi$，$\gamma_k+\alpha \in \Phi$.

记 $a_k = a(\alpha,\gamma_k)$，$k=-p,\cdots,q-1$，则

$$\frac{2\langle\alpha,\gamma_k\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \begin{cases} a_{-p}, & k=-p \\ a_k - a_{k-1}, & -p<k<q \\ -a_{q-1} & k=q \end{cases}$$

$q\neq 0$ 时，
$$a_0 = \frac{2\langle\alpha,\gamma_0+\gamma_{-1}+\cdots+\gamma_{-p}\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = \frac{2\langle\alpha,(p+1)\beta-\frac{1}{2}(p+1)p\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$
$$= -p(p+1) + (p+1)\cdot\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$$
$$= -p(p+1) + (p+1)(p-q)$$
$$= -(p+1)q$$

又 $a_0 = a(\alpha,\beta) \Rightarrow -(p+1)q = a(\alpha,\beta)$

$q=0$ 时，$N_{\alpha,\beta}=0 \Rightarrow a(\alpha,\beta)=0$，式子亦成立

③：$p+q\leq 3$，即链长至多为4

pf：由 Lie 括号计算知，$\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = a(\alpha,\beta)\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$.

因而 $p-q\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$

对给定α链，总可以从端点选取得到新的α链

故不妨设 $p=0$，$\Rightarrow |q|\leq 3$. #

于是，所有可能的α链共10种

(p,q)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,2)$	$(1,1)$	$(2,0)$
α链	β	β — $\alpha+\beta$	$-\alpha+\beta$ — β	β — $\alpha+\beta$ — $2\alpha+\beta$	$-\alpha+\beta$ — β — $\alpha+\beta$	$-2\alpha+\beta$ — $-\alpha+\beta$ — β

(p,q)	$(0,3)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(3,0)$

α链	$\beta \quad \alpha+\beta \quad 2\alpha+\beta \quad 3\alpha+\beta$	$-\alpha+\beta \quad \beta \quad \alpha+\beta \quad 2\alpha+\beta$	$-2\alpha+\beta \quad -\alpha+\beta \quad \beta \quad \alpha+\beta$	$-3\alpha+\beta \quad -2\alpha+\beta \quad -\alpha+\beta \quad \beta$

其中，$p>q \iff \cos(\alpha,\beta)>0 \iff \theta(\alpha,\beta)<\frac{\pi}{2}$

$p=q \iff \theta(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}$

$p<q \iff \theta(\alpha,\beta)>\frac{\pi}{2}$

于是，关于其中向量长度关系有下面结论.

(1). $p+q=1$ 时，考虑 $(p,q)=(0,1)$

$S_\alpha \beta = \beta - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha \in \Phi \implies S_\alpha\beta = \alpha+\beta$

$\implies |\alpha+\beta| = |\beta|$

即 α 链两端等长，且关于 S_α 作用对称

(2). $p+q=2$ 时，考虑 $(p,q)=(0,2)$

由 $\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = p-q = -2 \implies \frac{|\beta|}{|\alpha|}\cdot 2\cos(\alpha,\beta) = -2$

$\implies \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \sqrt{2}$, $2\cos(\alpha,\beta) = -\sqrt{2}$,

即 $\theta(\alpha,\beta)=\frac{3\pi}{4}$, $|\beta| = \sqrt{2}|\alpha|$

$\implies |\alpha+\beta| = |\alpha|$.

于是 α 链三由比为 $(\sqrt{2}:1:\sqrt{2})$，且关于 S_α 作用对称.

(3) $p+q=3$ 时，考虑 $(p,q)=(0,3)$

由 $\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} = p-q = -3 \implies \frac{|\beta|}{|\alpha|}\cdot 2\cos(\alpha,\beta) = -3$

同 (2) 讨论，得 α 链四由比为 $(\sqrt{3}:1:1:\sqrt{3})$，且关于 S_α 作用对称

综上：α 链关于 S_α 作用对称，$p+q\le 3$ 且

$p+q=0 \implies \langle\alpha,\beta\rangle=0$ 且 $\beta\pm\alpha\notin\Phi$

$p+q=1 \implies$ 两端相等

$p+q=2 \implies$ 三由比为 $(\sqrt{2}:1:\sqrt{2})$

$p+q=3 \implies$ 四由比为 $(\sqrt{3}:1:1:\sqrt{3})$

note: $p+q=2,3$ 的情况中，α, β 比例信息确定，此时 p', q' 未知.

$p+q=1$ 时，尚不能确定 α, β 长度及夹角信息.

note2：由 Cartan 阵性质，$A(\alpha,\beta)=p-q$ 有相似结论且较 lie 更弱

④. $q=0 \Rightarrow N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}=0$

$q\neq 0 \Rightarrow N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}=-(p+1)^2$

Pf. 由 $a(\alpha,\beta)=N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}\cdot\dfrac{\langle\beta,\beta\rangle}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}=-(p+1)q$

$\Rightarrow N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}=-(p+1)q\cdot\dfrac{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}$,

$\Rightarrow q=0$ 时，$N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}=0$

$q\neq 0$ 时：(p,q)	$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(0,2)$	$(1,2)$	$(0,3)$
$-(p+1)q$	-1	-2	-3	-2	-4	-3
$\dfrac{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}$	1	2	3	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$
$N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}$	-1	-4	-9	-1	-4	-1

均有 $N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}=-(p+1)^2$.

推论：$\alpha+\beta\in\Phi$ 时，$N_{\alpha,\beta}\neq 0$，$\Rightarrow [L_\alpha L_\beta]=L_{\alpha+\beta}$

⑤. $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Phi$ s.t. $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$,

则 $$\frac{N_{\alpha,\beta}\cdot N_{\gamma,\delta}}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}+\frac{N_{\beta,\gamma}\cdot N_{\alpha,\delta}}{\langle\beta+\gamma,\beta+\gamma\rangle}+\frac{N_{\gamma,\alpha}N_{\beta,\delta}}{\langle\gamma+\alpha,\gamma+\alpha\rangle}=0$$

Pf. 考虑 $[[e_\alpha e_\beta]e_\gamma]+[[e_\beta e_\gamma]e_\alpha]+[[e_\gamma e_\alpha]e_\beta]=0$

$\Rightarrow N_{\alpha,\beta}\cdot[e_{\alpha+\beta},e_\gamma]+N_{\beta,\gamma}[e_{\beta+\gamma}e_\alpha]+N_{\gamma,\alpha}[e_{\alpha+\gamma}e_\beta]=0$

$\downarrow \alpha+\beta\in\Phi$

$\Rightarrow N_{\alpha,\beta}N_{\alpha+\beta,\gamma}e_\delta+N_{\beta,\gamma}N_{\beta+\gamma,\alpha}e_\delta+N_{\gamma,\alpha}N_{\alpha+\gamma,\beta}e_\delta=0$

$\Rightarrow N_{\alpha,\beta}N_{-\gamma-\delta,\gamma}+N_{\beta,\gamma}N_{-\alpha-\delta,\alpha}+N_{\gamma,\alpha}N_{-\beta-\delta,\beta}=0$

$\downarrow \alpha+\beta\in\Phi$

$$\Rightarrow \frac{N_{\alpha,\beta}\cdot N_{\gamma,\delta}}{\langle\gamma+\delta,\gamma+\delta\rangle}\cdot\langle\delta,\delta\rangle+\frac{N_{\beta,\gamma}\cdot N_{\alpha,\delta}}{\langle\alpha+\delta,\alpha+\delta\rangle}\cdot\langle\delta,\delta\rangle+\frac{N_{\gamma,\alpha}\cdot N_{\beta,\delta}}{\langle\beta+\delta,\beta+\delta\rangle}\cdot\langle\delta,\delta\rangle=0$$

$$\Rightarrow \frac{N_{\alpha,\beta}\cdot N_{\gamma,\delta}}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}+\frac{N_{\beta,\gamma}\cdot N_{\alpha,\delta}}{\langle\beta+\gamma,\beta+\gamma\rangle}+\frac{N_{\gamma,\alpha}\cdot N_{\beta,\delta}}{\langle\alpha+\gamma,\alpha+\gamma\rangle}=0$$

note：上式对 $\alpha+\beta\notin\Phi$ 时亦成立.

※. $N_{\alpha,\beta}$ 与 $e_\alpha,\alpha\in\Phi$ 选取有关，

以上性质基于 $[e_\alpha,e_{-\alpha}]=h_\alpha=\frac{h_\alpha'}{\langle h_\alpha',h_\alpha'\rangle}$ 导出.

Cpt 7.2. 唯一性定理

0. recall：

① L 半单，L 有单理想分解 $L=\bigoplus L_i$

$\Leftrightarrow$ L 的 Dynkin 图为 $\Gamma=\dot{\bigcup}\Gamma_i$，$\Gamma_i$ 为 L_i 对应 Dynkin 图且连通.

②. L 单 $\Rightarrow$ L 的有的 Dynkin 图在上一章标准列表中.

本章将得到其逆命题，本节考虑其唯一性.

1. Lie 代数的根系 Φ 由 cartan 矩阵 A 唯一确定

Pf：$\Phi=W\Pi\Rightarrow\Phi$ 由 W,Π 确定.

设 $\Pi=\{\alpha_i\}$，$\forall\ s_i\in S_\Pi$，$s_i(\alpha_j)=\alpha_j-A_{ij}\alpha_i$

$\Rightarrow s_i$ 由 Π,A 确定

又 $W=\langle S_\Pi\rangle\Rightarrow W$ 由 Π,A 确定

$\Rightarrow\Phi$ 由 Π,A 确定.

即 $\forall\beta\in\Phi$，借由 A，β 可由 Π 线性表示，系数被 A 确定

$\Rightarrow\forall\alpha\in\Pi,\beta\in\Phi$，$\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ 被 A 确定.

又 $\forall\alpha\in\Pi$，有 $\frac{1}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\sum_{\beta\in\Phi}\left(\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\right)^2$，

$\Rightarrow|\alpha|$ 被 A 确定.

另一方面，$A_{ij}=\frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|}\cdot\cos(\alpha_i,\alpha_j)\Rightarrow\alpha_i,\alpha_j$ 夹角被 A 确定.

于是 Π 被 A 确定，#

note：用 A 构造 Φ 的方法

① 由 $s_i(\alpha_j)=\alpha_j-A_{ij}\alpha_i\Rightarrow\Phi$ 用 Π 线性表示.

② $A_{ij}=2\frac{\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} \Rightarrow \forall \alpha\in\Pi, \beta\in\Phi$, $\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}$ 可求出

③ $\frac{1}{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\sum_{\beta\in\Phi}\left(\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\right)^2 \Rightarrow \forall\alpha\in\Pi$, $|\alpha|$ 可求.

④ 由 $A_{ij}=\frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|}\cdot\cos(\alpha_i,\alpha_j) \Rightarrow \forall\alpha_i,\alpha_j\in\Pi$, $\theta(\alpha_i,\alpha_j)$ 可求

⑤ Φ 由 Π 线性表示, 系数已知, 因而 Φ 长度及夹角可求.

Q: Φ 由其长度及夹角确定?

Q2: [连通下. Φ 知一边及 $\theta\neq$ 直的边比, 可求出所有边?

推论: Cartan 阵确定 Φ 的空间性质, 继而确定了 H^* 上内积运算.

2. 结构常数 + Cartan 阵 $\Rightarrow$ Lie 代数.

① recall: $\{e_\alpha|\alpha\in\Phi\}$ 被给定下, $\exists!\{e_{-\alpha}|\alpha\in\Phi\}$

s.t. $h_\alpha=[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\frac{h_\alpha'}{\langle h_\alpha',h_\alpha'\rangle}$

这一情形下, $\forall\alpha,\beta\in\Phi$ s.t. $\alpha+\beta\in\Phi$, 令 $N_{\alpha,\beta}=\frac{[e_\alpha,e_\beta]}{e_{\alpha+\beta}}$

并称 $N_{\alpha,\beta}$ 为结构常数

note: 方便起见, 给出 $N_{\alpha,\beta}$ 即默认 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Phi$.

(尽管有些结论对 $\alpha,\beta\in\Phi$, $\alpha+\beta\in\Phi$ 亦成立, (此时 $N_{\alpha,\beta}=0$))

② Cartan 阵 A 与结构常数 $\{N_{\alpha,\beta}\}$ 唯一确定 Lie 代数.

pf: A 确定 $\Pi,\Phi \Rightarrow$ 得到 L 的一组基 $\{h_\alpha|\alpha\in\Pi\}\cup\{e_\alpha|\alpha\in\Phi\}$

且 $[h_\alpha,h_\beta]=0$, $\alpha,\beta\in\Pi$

$[h_\alpha,e_\beta]=\beta(h_\alpha)e_\beta=2\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}e_\beta$, $\alpha\in\Pi$, $\beta\in\Phi$.

$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=h_\alpha$, $\alpha\in\Phi$

其中 h_α 由 $\langle h_\alpha,h_{\alpha_i}\rangle=\frac{2\langle\alpha,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$, $\forall\alpha_i\in\Pi$ 确定 Q: 具体的?

$$[e_\alpha,e_\beta]=\begin{cases}N_{\alpha,\beta}e_{\alpha+\beta}, & \alpha+\beta\in\Phi\\ 0, & \alpha+\beta\notin\Phi\end{cases}$$

于是 L 上运算被 A 唯一确定,

故 L 的结构在同构意义下唯一.

note: 只须让 $N_{\alpha,\beta}$ 可被自由选取.

3. 结构常数 $N_{\alpha,\beta}$ 自由性和线性.

⓪. recall 上节

$$N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta}=-(p+1)^2,$$

$$N_{\alpha,\beta}=-N_{\beta,\alpha}$$

$$N_{-\alpha-\beta,\alpha}=\frac{\langle\beta,\beta\rangle}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}\cdot N_{\alpha,\beta}$$

$$\frac{N_{\alpha,\beta}\cdot N_{\gamma,\delta}}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}+\frac{N_{\beta,\gamma}\cdot N_{\alpha,\delta}}{\langle\beta+\gamma,\beta+\gamma\rangle}+\frac{N_{\gamma,\alpha}\,N_{\beta,\delta}}{\langle\gamma+\alpha,\gamma+\alpha\rangle}=0,\quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=0.$$

①. $\alpha+\beta\in\Phi$, $0<\alpha<\beta$. $\Rightarrow$ 称根对 (α,β) 为 special.

(α,β) 为 special 且 $\forall$ special (γ,δ) s.t. $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, 有 $\alpha\le\gamma$.

$\Rightarrow$ 称 (α,β) 为 extraspecial.

note: $N_{\alpha,\beta}$ 隐含 (α,β) 或 (β,α) special.

此时, 简称 $N_{\alpha,\beta}$ special or extraspecial

②. $\forall\alpha\in\Phi^+\setminus\Pi$, $\exists\alpha_i\in\Pi$ s.t. $\alpha-\alpha_i\in\Phi^+$

pf: 反设 $\forall i$, $\alpha-\alpha_i\notin\Phi^+$,

由单根性质 $\Rightarrow\alpha-\alpha_i\notin\Phi$, $\forall i$

由 α 上 α_i-链是: $\alpha,\alpha_i+\alpha,\cdots,q\alpha_i+\alpha$

$\Rightarrow 2\frac{\langle\alpha,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}=-q\le 0$

$\Rightarrow\langle\alpha,\alpha_i\rangle\le 0$.

又 $\alpha=\sum_i n_i\alpha_i\in\Phi^+\Rightarrow n_i\ge 0$

$\Rightarrow\langle\alpha,\alpha\rangle=\sum_i n_i\langle\alpha_i,\alpha\rangle\le 0$ 矛.

推论: α 可分解为两个正根和 $\Leftrightarrow\alpha\in\Phi^+\setminus\Pi$

推论2: Φ 上 extraspecial 根对共 $|\Phi^+|-|\Pi|$

pf: (α,β) 为 extraspecial $\Rightarrow\alpha+\beta=\gamma\in\Phi^+\setminus\Pi$

反之, $\forall\gamma\in\Phi^+\setminus\Pi$, $\exists!$ extraspecial 根对 (α,β)

③. $\{N_{\alpha,\beta}\}$ 可由 extraspecial 的部分确定 (通过内积)

Pf: (1) 先证 $\{N_{\alpha,\beta}\}$ 可由 special 的部分确定.

$\forall \alpha+\beta=-\gamma\in\Phi$, 其可产生以下 12 种可能根对

(α,β), (β,γ), (γ,α), (β,α), (γ,β), (α,γ)

$(-\alpha,-\beta)$, $(-\beta,-\gamma)$, $(-\gamma,-\alpha)$, $(-\beta,-\alpha)$, $(-\gamma,-\beta)$, $(-\alpha,-\gamma)$

由于 $\alpha+\beta+\gamma\in\Phi \Rightarrow$ 其中两正一负 or 两负一正

$\Rightarrow$ 上面 12 种可能中,有且仅有一个根对为 special

由 $N_{-\alpha,-\beta}=\dfrac{-(p+1)^2}{N_{\alpha,\beta}} \Rightarrow$ 第二行根对的结构常数可由第一行得到

由 $N_{\alpha,\beta}=-N_{\beta,\alpha} \Rightarrow$ 首行右边三个可由左边得到

由 $N_{\gamma,\alpha}=N_{-\alpha-\beta,\alpha}=\dfrac{\langle\beta,\beta\rangle}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}\cdot N_{\alpha,\beta} \Rightarrow N_{\gamma,\alpha}$ 由 $N_{\alpha,\beta}$ 得到. $N_{\beta,\gamma}$ 同理.

于是,这 12 个根对的结构常数均可表为 $N_{\alpha,\beta}$ 的非零倍数,

因而其相互确定,且其中含一个 special 根对,故 $N_{\alpha\beta}$ 能确定.

(2) 再证 special 部分被 extraspecial 部分确定

设 (α,β) 为 special 且非 extraspecial. 对 $\alpha+\beta$ 的高归纳

$\exists!\ (\gamma,\delta)$ 为 extraspecial s.t. $\alpha+\beta=\gamma+\delta$

$\Rightarrow \alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)=0$, 且 $0<\gamma<\alpha<\beta<\delta$

$\Rightarrow$ 任二根线性无关

$$\Rightarrow \frac{N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\gamma,-\delta}}{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}+\frac{N_{\beta,-\gamma}\cdot N_{\alpha,-\delta}}{\langle\beta-\gamma,\beta-\gamma\rangle}+\frac{N_{-\gamma,\alpha}\cdot N_{\beta,-\delta}}{\langle\alpha-\gamma,\alpha-\gamma\rangle}=0$$

$\Rightarrow N_{\alpha,\beta}$ 由 $N_{-\gamma,-\delta}$, $N_{\beta,-\gamma}$, $N_{\alpha,-\delta}$, $N_{-\gamma,\alpha}$, $N_{\beta,-\delta}$ 确定.

$N_{-\gamma,-\delta}\Rightarrow N_{\gamma,\delta}$ 已知

不妨设 $\beta-\gamma$, $\alpha-\delta$, $\alpha-\gamma$, $\beta-\delta\in\Phi$. 否则相关 N 为零已求得.

$N_{\beta,-\gamma}\Rightarrow N_{-\gamma,\beta}\Rightarrow N_{\gamma-\beta,-\gamma}\Rightarrow N_{\gamma,\beta-\gamma}$ 或 $N_{\beta-\gamma,\gamma}$. $\gamma+\beta-\gamma<\alpha+\beta$ ✓

$N_{\alpha,-\delta}\Rightarrow N_{\delta-\alpha,\alpha}$ 或 $N_{\alpha,\delta-\alpha}$, $\alpha+\delta-\alpha<\alpha+\beta$ ✓

$N_{-\gamma,\alpha}\Rightarrow N_{\gamma,-\alpha}\Rightarrow N_{\alpha-\gamma,\gamma}$ 或 $N_{\gamma,\alpha-\gamma}$, $\alpha-\gamma+\gamma<\alpha+\beta$ ✓

$N_{\beta,-\delta}\Rightarrow N_{\delta-\beta,\beta}$ 或 $N_{\beta,\delta-\beta}$. $\delta-\beta+\beta<\alpha+\beta$ ✓.

综上，$\{N_{\alpha,\beta}\}$由 extraspecial 部分确定.

(4). $\{N_{\alpha,\beta} \mid (\alpha,\beta)$为 extraspecial$\}$的值可在 $\mathbb{C}$ 上任取.

Pf: 设 $\Phi^+ \setminus \Pi = \{\gamma_i\}_{i=1}^r$，且 $\gamma_i < \gamma_j$ 时，$i<j$

$\forall \gamma_i \Rightarrow \exists! (\alpha_i,\beta_i)$为 extraspecial s.t. $\alpha_i+\beta_i=\gamma_i$

即证 $\{N_{\alpha_i,\beta_i}\}$可任取

先将 $e_\Pi = \{e_\alpha \mid \alpha\in\Pi\}$ 取好.

注意到 $\Phi^+ = \Pi \cup \{\gamma_i\}_{i=1}^r$，即 Π 外的正根均可分解为二根和

$\gamma_1 = \alpha_1+\beta_1$，$\alpha_1,\beta_1<\gamma_1 \Rightarrow \alpha_1,\beta_1\in\Pi$，即 $e_{\alpha_1}, e_{\beta_1}$ 已选定.

此时，令 $e_{\gamma_1} = \dfrac{1}{N_{\alpha_1,\beta_1}}[e_{\alpha_1}, e_{\beta_1}]$ 即可.

e_{γ_i}，$i<k$ 取好时，

由 $\gamma_k = \alpha_k+\beta_k$，$\alpha_k,\beta_k<\gamma_k \Rightarrow \alpha_k,\beta_k\in\Pi\cup\{\gamma_i \mid i<k\}$

$\Rightarrow e_{\alpha_k}, e_{\beta_k}$ 已取定

此时令 $e_{\gamma_k} = \dfrac{1}{N_{\alpha_k,\beta_k}}[e_{\alpha_k}, e_{\beta_k}]$ 即可.

依次下去，可唯一得到 $\{\gamma_i\}_{i=1}^r$，s.t. $\{N_{\alpha_i,\beta_i}\}$为所给值.

推论：e_Π 取定下，$\{N_{\alpha,\beta}\}$与 $e_{\Phi^+\setminus\Pi}$ 取法建立双射.

4. 半单 Lie 代数 L 由其 cartan 矩阵唯一确定.

Pf: 设 $L = H\oplus\sum L_\alpha$，以 $\{h_\alpha \mid \alpha\in\Pi\}\cup\{e_\alpha \mid \alpha\in\Phi\}$为基，

前面已证 L 由 $\{N_{\alpha,\beta}\}$ 及 cartan 矩阵确定

$\forall$ extraspecial 根对 (α,β)，令 $N_{\alpha,\beta}=1$

则 $\{N_{\alpha,\beta}\}$被唯一确定，从而 L 由 A 唯一确定.

note: Lie 代数 = 线性空间 + Lie 括号.

① 因而唯一确定 Lie 代数 $\Leftrightarrow$ 构造一组基，并建立其上运算，s.t. 该运算与 L 上运算同构.

② 而 L 给出基下，其 Lie 括号计算 $\Leftrightarrow$ 基之间运算

③ 前面得到，$[h_\alpha, e_\beta]$ 计算归结为正内积计算

$[e_\alpha, e_\beta]$ 计算仍转为3内积和 $N_{\alpha,\beta}$ 之大

④ 另一方面. Cartan 矩阵可导出 Π 上 n 的性质 (内积)

继而得到 Φ 的 n 的性质 (内积

而 $\{N_{\alpha,\beta}\}$ 在内积已知下, 由 extraspecial 确定,

且 extraspecial 具有自由性.

因而 $N_{\alpha,\beta}$ 亦可视作被内积确定.

note2: 本节性质对半单 Lie 代数均成立

另外, "任取 $\{N_{\alpha,\beta}\}$" 总默认指 $N_{\alpha,\beta}$ 取 $\mathbb{C}$ 上非零元.

Cpt 7.3. 单 Lie 代数中的生成元及关系

0. 存在性由 J. Tits 在 1966 年给出. 过程技巧性和复杂性都比较高, 本章给出另一种证明方法

1. 设 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^{l}$, $\forall \alpha_i \in \Pi$ 令 $h_i = h_{\alpha_i} = \frac{2h'_{\alpha_i}}{\langle h'_{\alpha_i}, h'_{\alpha_i}\rangle}$,

总可以选取 $e_i \in L_{\alpha_i}$, $f_i \in L_{-\alpha_i}$ s.t. $h_i = [e_i, f_i]$

则有 $L = \langle \{e_i, f_i\} \rangle$

pf: 上一节中, e_Π 借由 $\{N_{\alpha,\beta}\}$, 生成 e_{Φ^+}

同理有 f_Π 生成 e_{Φ^-}

$\Rightarrow L = \langle e_{\Phi^+} \cup e_{\Phi^-} \rangle = \langle e_\Pi, f_\Pi \rangle$.

2. 计算上, $\{h_i\}$, $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ 满足以下性质

(1): $[h_i, h_j] = 0$.

(2) $[h_i, e_j] = A_{ij} e_j$ $\quad \rightarrow \langle h_i, e_j \rangle = \left[\frac{2\cdot h'_{\alpha_i}}{\langle h'_{\alpha_i}, h'_{\alpha_i}\rangle}, e_j\right] = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}$

(3) $[h_i, f_j] = -A_{ij} f_j$

(4) $[e_i, f_i] = h_i$

(5) $[e_i, f_j] = 0$, $i \neq j$

(6) $[e_i, [e_i, \cdots [e_i, e_j] \cdots]] = 0$, $i \neq j$

$1-A_{ij}$ 个

(7) $[f_i[f_i\cdots[f_if_j]\cdots]]=0,\ i\neq j$

pf: (1). 由 $H^2=0$ 易见

(2) $[h_i\, e_j]=\alpha_j(h_i)e_j=\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}e_j=A_{ij}e_j$

(3) $[h_i\, f_j]=-\alpha_j(h_i)e_j=-A_{ij}e_j$

(4). 由 f_j 定义易见

(5) $\alpha_i,\alpha_j\in\Pi\Rightarrow\alpha_i-\alpha_j\notin\Phi,\ i\neq j$

$\Rightarrow[e_i,f_j]=e_{\alpha_i-\alpha_j}=0,\ i\neq j$

(6) $\alpha_j-\alpha_i\notin\Phi\Rightarrow$ 设 α_j 上 α_i-链为 $\alpha_j,\alpha_i+\alpha_j,\cdots,q\alpha_i+\alpha_j$

$\Rightarrow(\mathrm{ad}\,e_i)^qL_{\alpha_j}=L_{q\alpha_i+\alpha_j}\neq0$

$(\mathrm{ad}\,e_i)^{q+1}L_{\alpha_j}=[e_{\alpha_i},L_{q\alpha_i+\alpha_j}]=0$

又 $A_{ij}=\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}=-q$ 立证.

(7) 同 (6).

note: $\{e_i\},\{h_i\},\{f_i\}$ 生成的 Lie 代数 L.

理 L 上的计算 可借由上述性质归结为基上运算

Cpt 2.4 Lie代数 $L(A)$ 与 $\tilde{L}(A)$

0、前述，已得 L 由 A 唯一确定.

本节利用自由代数构造两个 A 生成的重要的 Lie 代数.

1、自由代数

① 令 F 为 $\{x_i\}$ 在 k 上生成的自由代数

即 F 为代数 $(k\cdot,+,\times)$ 乘法为序列拼接乘法

向量空间，基为序列 $\{x_{i_1},\cdots x_{i_r}\}$

② 自由代数为多项式环的推广，F 亦记为 $k[x_1,\cdots,x_n,\cdots]$

其中 $x_ix_j\neq x_jx_i\ (i\neq j)$

2、相关数据

① 令 F 为以 $\{e_i\}\cup\{h_i\}\cup\{f_i\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上生成的自由代数

② $[F]$ 为相应生成的 Lie 代数

③ 令 $L = \langle e_i, h_i, f_i\rangle$ 为 $[F]$ 上 $\{e_i, f_i, f_i\}$ 生成的 Lie 子代数

note：F 的代数生成元未必为 $[F]$ 的 Lie 代数生成元

④ 令 $J, \tilde{J}$ 分别为
$$\begin{cases} [h_i, h_j] \\ [h_i, e_j] - a_{ij} e_j, \\ [h_i, f_j] + a_{ij} f_j \\ [e_i, f_i] - h_i \\ [e_i, f_j], \ i \neq j \\ (\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}}(e_j), \ i \neq j \\ (\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}}(f_j), \ i \neq j \end{cases} \qquad \begin{cases} [h_i, h_j] \\ [h_i, e_j] - a_{ij} e_j, \\ [h_i, f_j] + a_{ij} f_j \\ [e_i, f_i] - h_i \\ [e_i, f_j], \ i \neq j \end{cases}$$

$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, e_{\alpha+\beta}$ 隐含在其中？

生成的 L 的 Lie 子理想

定义 $L(A) = L/J$，$\tilde{L}(A) = L/\tilde{J}$

note：$L(A)$ 即为所求 Lie 代数.

$\tilde{L}(A)$ 比 $L(A)$ 稍大，但一些性质在推导中有重要作用

注意到 $\tilde{J} \subseteq J \Rightarrow$ 存在满的 Lie 同态 $L \to \tilde{L}(A) \to L(A)$

note：$\tilde{L}(A)$，$L(A)$ 因自由商而具有相应运算性质子这性质

3. 令 F^- 为以 $\{f_i\}$ 为基生成的自由代数

令 $\rho: \tilde{L}(A) \to [\operatorname{End} F^-]$

$$f_i \mapsto \rho(f_i): f_{i_1}\cdots f_{i_r} \mapsto f_i \cdot f_{i_1}\cdots f_{i_r}$$

$$h_i \mapsto \rho(h_i): f_{i_1}\cdots f_{i_r} \mapsto -\Big(\sum_{k=1}^{r} a_{i i_k}\Big) f_{i_1}\cdots f_{i_r}$$

$$e_i \mapsto \rho(e_i): f_{i_1}\cdots f_{i_r} \mapsto -\sum_{k=1}^{r} \delta_{i i_k}\Big(\sum_{h=k+1}^{r} a_{i_k i_h}\Big) f_{i_1}\cdots \hat{f}_{i_k}\cdots f_{i_r}$$

则 ρ 为 Lie 代数同态，于是 F^- 为 $\tilde{L}(A)$ 模.

(recall：V 为 L 模 $\Leftrightarrow$ Lie 同态 $\rho: L \to [\operatorname{End} V]$

$\Leftrightarrow \forall x\in L, v\in V$，有 xv 双线性

$[xy]v = xyv - yxv$.

Pf: 由$\{f_{i_1}\cdots f_{i_r}\}$作成 F^- 一组基

$\Rightarrow \rho(x)$ 唯一确定了 $\mathrm{End}F^-$ 中元素

即有 $\rho: X\to \mathrm{End}F^-$，$X=\{f_i, h_i, e_i\}$

注意到 $F=\langle X\rangle$ 为 X 生成的自由代数

$\Rightarrow \rho$ 唯一确定了代数同态 $\varphi: F\to \mathrm{End}F^-$

$\Rightarrow F^-$ 作 F-代数模

φ 同时诱导了 $[F]\to[\mathrm{End}F^-]$，即 Lie 同态.

$[F]$ 限制在 L 上，得到 Lie 同态 $\psi: L\to[\mathrm{End}F^-]$

于是 F^- 作成 L-Lie 代数模

又 $\because \tilde{L}(A)=L/J$，$F^-$ 可视为 L/J 模 $\Leftrightarrow \psi|_J: L\to 0$

即证 J 上在 Lie 同态 ψ 下对 F^- 为平凡作用

即：(1) $[\rho(h_i)\rho(h_j)]=0$

(2) $[\rho(h_i)\rho(e_j)] = A_{ij}\rho(e_j)$

(3) $[\rho(h_i)\rho(f_j)] = -A_{ij}\rho(f_j)$

(4) $[\rho(e_i)\rho(f_i)] = \rho(h_i)$

(5) $[\rho(e_i)\rho(f_j)] = 0$，$i\neq j$

(1) 定义易见 $\rho(h_i)\cdot\rho(h_j) = \rho(h_j)\cdot\rho(h_i)$，不引起歧义下，$\rho$ 省略.

(2). $h_i e_j f_{i_1}\cdots f_{i_r} = -\sum_{k=1}^{r}\delta_{j i_k}\left(\sum_{h=k+1}^{r}A_{j i_h}\right)\cdot h_i f_{i_1}\cdots\hat{f}_{i_k}\cdots f_{i_r}$

$= \sum_{k=1}^{r}\delta_{j i_k}\left(\sum_{h=k+1}^{r}A_{j i_h}\right)\left(\sum_{g\neq k}A_{i,i_g}\right)\cdot f_{i_1}\cdots\hat{f}_{i_k}\cdots f_{i_r}$

$e_j h_i f_{i_1}\cdots f_{i_r} = -e_j\left(\sum_{g=1}^{r}A_{i i_g}\right)\cdot f_{i_1}\cdots f_{i_r}$

$= \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{g=1}^{r}A_{i i_g}\right)\cdot\delta_{j i_k}\left(\sum_{h=k+1}^{r}A_{j i_h}\right)\cdot f_{i_1}\cdots\hat{f}_{i_k}\cdots f_{i_r}$

$$\Rightarrow (h_i e_j - e_j h_i) f_{i_1}\cdots f_{i_r} = -\sum_{k=1}^{r} A_{i,i_k}\cdot \delta_{j,i_k}\Big(\sum_{h=k+1}^{r} A_{j,i_h}\Big) f_{i_1}\cdots \hat{f}_{i_k}\cdots f_{i_r}$$

$$= -A_{ij}\sum_{k=1}^{r} \delta_{j,i_k}\Big(\sum_{h=k+1}^{r} A_{j,i_h}\Big) f_{i_1}\cdots \hat{f}_{i_k}\cdots f_{i_r}$$

$$= A_{ij}\,\rho(e_j)$$

note: $e_j f_{i_1}\cdots f_{i_r} = \sum_{k=1}^{r} f_{i_1}\cdots f_{i_{k-1}}[e_j f_{i_k}] f_{i_{k+1}}\cdots f_{i_r}$

$= \sum_{k=1}^{r} \delta_{j i_k} f_{i_1}\cdots f_{i_{k-1}} h_{i_k} f_{i_{k+1}}\cdots f_{i_r}$

(3). $h_i f_j f_{i_1}\cdots f_{i_r} = -\Big(\sum_{k=1}^{r} A_{i i_k} + A_{ij}\Big)\cdot f_j f_{i_1}\cdots f_{i_r}$

$f_j h_i f_{i_1}\cdots f_{i_r} = -f_j\cdot\Big(\sum_{k=1}^{r} A_{i i_k}\Big) f_{i_1}\cdots f_{i_r}$

$\Rightarrow (h_i f_j - f_j h_i) f_{i_1}\cdots f_{i_r} = -A_{ij} f_{i_1}\cdots f_{i_k} = -A_{ij}\cdot\rho(f_j)$

(4), (5): $e_i f_j f_{i_1}\cdots f_{i_r} = \sum_{k=1}^{r} \delta_{i,i_k} f_j f_{i_1}\cdots f_{i_{k-1}} h_{i_k}\cdots f_{i_r} + \delta_{ij} h_j f_{i_1}\cdots f_{i_r}$

$f_j e_i f_{i_1}\cdots f_{i_r} = f_j\cdot\sum_{k=1}^{r} \delta_{i,i_k} f_{i_1}\cdots f_{i_{k-1}} h_{i_k}\cdots f_{i_r}$

$$\Rightarrow (e_i f_j - e_j f_i) f_{i_1}\cdots f_{i_r} = \delta_{ij} h_j f_{i_1}\cdots f_{i_r} = \begin{cases} \rho(h_i), & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

note：验算5条性质前，用到以下性质

(1). 自由代数的泛性质

$F=\langle x_i\rangle$ 为 $\{x_i\}$ 生成的自由结合代数，$\tilde{F}$ 为任一结合代数

$\Rightarrow \forall \rho:\{x_i\}\to\tilde{F}$，$\rho$ 唯一确定了 $F\to\tilde{F}$ 的代数同态.

$x_i \to y_i$

(2). $\varphi: F\to \mathrm{End}\,\tilde{F}$ 为代数同态 $\Longleftrightarrow$ $\tilde{F}$ 作成 F 代数模.

(3). $\varphi: F\to \mathrm{End}\,\tilde{F}$ 为代数同态

$\Rightarrow \varphi$ 诱导 Lie 同态 $\varphi: [F]\to[\mathrm{End}\,\tilde{F}]$

即，代数模总会诱导相应 Lie 模

(4). $\varphi: L\to\tilde{L}$ 为 Lie 同态，$I \triangleleft L$

则 $\tilde{\varphi}: L/I\to\tilde{L}$ 良定义 $\Longleftrightarrow$ $\varphi|_I : I\to 0$.

$x+1 \mapsto \varphi(x)$

note2: e_i, h_i 对 $f_{i_1}\cdots f_{i_r}$ 的作用亦可如下理解

$$h_i f_{i_1}\cdots f_{i_r} = \sum_{k=1}^{r} f_{i_1}\cdots f_{i_{k-1}}[h_i f_{i_k}]\cdots f_{i_r} = -\Big(\sum_{k=1}^{r} A_{i i_k}\Big) f_{i_1}\cdots f_{i_r}$$

$$e_i f_{i_1}\cdots f_{i_r} = \sum_{k=1}^{r} f_{i_1}\cdots f_{i_{k-1}}[e_i f_{i_k}]\cdots f_{i_r}.$$

其中 $[h_i f_{i_k}]$ 与 $[e_i f_{i_k}]$ 均落在 F^- 上，因而定义良性，且是自然的!

推论：$\tilde{L}(A)$ 上，$\{h_i\}_{i=1}^{l}$ 线性无关

pf：只须证 $\rho(h_i)$ 在 $\mathrm{End}\,F^-$ 上线性无关

由 $\rho(h_i) f_j = -A_{ij} f_j$

$\sum \lambda_i \rho(h_i) = 0 \Rightarrow \sum \lambda_i A_{ij} = 0$，$\forall j = 1, \cdots, l$

又 ∵ cartan 阵 A 非奇异 $\Rightarrow \lambda_i$ 均为零

$\Rightarrow \rho(h_i)$ 线性无关 #

note：这里第一处用到 cartan 阵性质，即行列式非零.

Q：直接用 $\tilde{L}(A)$ 看？体会 ρ 作用

4、权空间分解

(1). 处理思想.

令 $\hat{H} = \mathrm{span}\{h_i\}$ 为 $\tilde{L}(A)$ 上 $\{h_i\}$ 张成的空间

由 $\tilde{L}(A)$ 的性质构造 $\Rightarrow [\hat{H}, \hat{H}] = 0$

即 $\hat{H}$ 为 $\tilde{L}(A)$ 的交换子代数.

考虑 $\tilde{L}(A)$ 作为 $\hat{H}$ 模的权空间分解

注意到 $\tilde{L}(A)$ 不为有限维模，因而 Cpt 2 一些理论不可直接用

类比 Cpt2 的方法. 作下述定义

(2). $\mathrm{Hom}(\hat{H}, \mathbb{C})$ 中元素称为权，任一权 $\mu: \hat{H} \to \mathbb{C}$,

定义 $\tilde{L}(A)_\mu = \{x \in \tilde{L}(A) \mid [hx] = \mu(h)x, \forall h \in \hat{H}\}$

并称 $\tilde{L}(A)_\mu$ 为 μ 的权空间，其上元素为权 μ 的权向量

③ $\widetilde{L}(A)=\bigoplus_{\mu}\widetilde{L}(A)_{\mu}$，即 $\widetilde{L}(A)$ 作为 $\widetilde{H}$ 模有权空间分解

Pf：先证 $\widetilde{L}(A)=\sum_{\mu}\widetilde{L}(A)_{\mu}$

注意到 $x\in\widetilde{L}(A)_{\mu}$, $y\in\widetilde{L}(A)_{\lambda}\Rightarrow[xy]\in\widetilde{L}(A)_{\lambda+\mu}$

即 $\forall h\in\widetilde{H}$, $[h[xy]]=[[hx]y]+[x[hy]]$

$$=\lambda(h)[xy]+\mu(h)[xy]$$

$$=(\lambda+\mu)(h)[xy]$$

令 $\alpha_i:\widetilde{H}\to\mathbb{C}$ s.t. $\alpha_i(h_j)=A_{ji}$

由 $\{e_i\},\{f_i\}\{h_i\}$ 定义 $\Rightarrow\begin{cases}e_i\in\widetilde{L}(A)_{\alpha_i}\ ([h_j e_i]=A_{ji}e_i)\\ f_i\in\widetilde{L}(A)_{-\alpha_i}\\ h_i\in\widetilde{L}(A)_0\end{cases}$

$\Rightarrow e_i,f_i,h_i$ 在 Lie 括号下，所得仍为权向量

又 $\widetilde{L}(A)$ 由 $\{e_i\}\{f_i\},\{h_i\}$ Lie 括号生成.

$\Rightarrow\widetilde{L}(A)=\sum_{\mu}\widetilde{L}(A)_{\mu}$.

下证加式为直和式，

$\forall x\in\widetilde{L}(A)_{\mu}$ 且 $x=\sum_{\nu}x_{\nu}$, $x_{\nu}\in\widetilde{L}(A)_{\nu}$, 且 $\mu\neq\nu$

即 $x\in\widetilde{L}(A)_{\mu}\cap(\sum_{\nu}\widetilde{L}(A)_{\nu})$, 下证 $x=0$.

$x\in\widetilde{L}(A)_{\mu}\Rightarrow(\mathrm{ad}h-\mu(h)\cdot1)x=0$

$x\in\sum_{\nu}x_{\nu}\Rightarrow\prod_{\nu}(\mathrm{ad}h-\nu(h)\cdot1)x=0$

$\mu\neq\nu\Rightarrow H_{\nu}=\{h\in\widetilde{H}\mid(\mu-\nu)h=0\}$ 构成 $\widetilde{H}$ 真子空间.

$\Rightarrow H\setminus(\bigcup_{\nu}H_{\nu})\neq\emptyset$.

$\Rightarrow\exists h\in H$ s.t. $\mu(h)\neq\nu(h)$, $\forall\nu$.

$\Rightarrow t-\mu(h)$ 与 $\prod_{\nu}(t-\nu(h))$ 在 $\mathbb{C}[t]$ 上互素

$\Rightarrow\exists\ a(t),b(t)\in\mathbb{C}[t]$,

s.t. $a(t)(t-\mu(h))+b(t)\prod_{\nu}(t-\nu(h))=1$

$\Rightarrow a(\mathrm{ad}h)\cdot(\mathrm{ad}h-\mu(h)\cdot1)x+b(\mathrm{ad}h)\cdot\prod_{\nu}(\mathrm{ad}(h)-\nu(h)\cdot1)x=x$

$\Rightarrow X=0$. #

简化：(1). 令 $X=\{e_i, f_i, h_i\}$, $\tilde{L}(A)=\mathrm{span}\{[X]\}$, 且 X 均为权向量

由 [权向量] 仍为权向量 $\Rightarrow [X]$ 由权向量构成

$\Rightarrow \tilde{L}(A)=\sum_\mu \tilde{L}(A)_\mu$

(2). $x\in \tilde{L}(A)_\mu \cap \sum_\nu \tilde{L}(A)_\nu$

$\Rightarrow x$ 被 $\underbrace{ad\,h-\mu(h)\cdot 1}_{\text{一次因子}}$ 和 $\underbrace{\prod_\nu (ad\,h-\nu(h)\cdot 1)}_{\text{一次因子累乘}}$ 零化，$\forall h\in\tilde{H}$

取 h, s.t. 相关联的行列式互素 $\Rightarrow ax+by=1$ 得到恒等

$\Rightarrow X$ 被其零化项生成，即 $X=0$

※. 推论：H 模 L 由 H 的权向量生成，则 L 有权空间分解.

note: $\forall x\in L_\mu$, $y\in L_\lambda$, 有 $[xy]\in L_{\lambda+\mu}$ 对一般 L 模成立.

此外：$L_\mu \cap \sum_{\lambda\neq\mu} L_\lambda = 0$. (有限和)

$\Rightarrow 0\neq x\in L_\lambda$, $0\neq y\in V_\mu$, $\lambda\neq\mu \Rightarrow x+y$ 不为权向量.

Q: Cpt2 中的证明思路与本章对比

有限维单重模 $\Rightarrow V=\bigoplus_\mu V_\mu$，即权空间分解 $\Rightarrow$ 所有理想可知

无限维又是否有权分解？

5、权空间分解中的性质.

(1). 令 $\alpha_i(h_j)=A_{ji}$ $\Rightarrow \alpha_i(h_1 \cdots h_l)=w_i A$ $\quad |A|\neq 0$

由↑定义 $\{\alpha_i\}$

$\Rightarrow \{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 线性无关

$\Rightarrow \{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 作成 $Hom(\tilde{H},\mathbb{C})$ 一组基

令 $Q=\{n_1\alpha_1+\cdots+n_l\alpha_l \mid n_i\in\mathbb{Z}\}$

$Q^+=\{n_1\alpha_1+\cdots+n_l\alpha_l\neq 0 \mid n_i\in\mathbb{Z}_+\}$

$Q^-=\{n_1\alpha_1+\cdots+n_l\alpha_l\neq 0 \mid n_i\in\mathbb{Z}_-\}$

令 $\tilde{L}(A)^+ = \sum_{\mu\in Q^+} \tilde{L}(A)_\mu$,

$\tilde{L}(A)^- = \sum_{\mu\in Q^-} \tilde{L}(A)_\mu$ } 权空间分解直和性

$\Rightarrow \tilde{L}(A)^+ + \tilde{H} + \tilde{L}(A)^- = \tilde{L}(A)^+ \oplus \tilde{H} \oplus \tilde{L}(A)^-$

令 $\tilde{N}^+ = \langle e_1, \cdots, e_l \rangle$ 为 $\tilde{L}(A)$ 子代数

$\tilde{N}^- = \langle f_1, \cdots, f_l \rangle$ 为 $\tilde{L}(A)$ 子代数.

由 $e_i \in \tilde{L}(A)_{\alpha_i} \subseteq \tilde{L}(A)^+$, 且 $[e_i e_j] \in \tilde{L}(A)_{\alpha_i+\alpha_j} \subseteq \tilde{L}(A)^+$

$\Rightarrow \tilde{N}^+ \subseteq \tilde{L}(A)^+$, 同理 $\tilde{N}^- \subseteq \tilde{L}(A)^-$

$\Rightarrow \tilde{N}^- + \tilde{H} + \tilde{N}^+ = \tilde{N}^- \oplus \tilde{H} + \tilde{N}^+$

② . lemma: $X, Y \subseteq L$, $H = [X]$, $K = [Y]$ 分别为 X, Y 生成的 L 子代数.

则 $[X, Y] \subseteq K \Leftrightarrow [H, K] \subseteq K$

pf: $\Leftarrow$ ✓, $\Rightarrow$: $x \in X$, $y_1, y_2 \in K$ s.t. $[x y_1], [x y_2] \in K$

$\Rightarrow [x [y_1 y_2]] = [[x y_1] y_2] + [y_1 [x y_2]]$

$\in [K y_2] + [y_1 K] \subseteq K$.

$\Rightarrow [X, K] \subseteq K$,

$\forall x_1, x_2 \in H$, s.t. $[x_1, K], [x_2, K] \subseteq K$

$\Rightarrow [[x_1 x_2] K] \subseteq [x_1 [x_2 K]] + [[x_1 K] x_2]$

$\subseteq [x_1 K] + [K, x_2] \subseteq K$

$\Rightarrow [H K] \subseteq K$.

即, $[H K] \subseteq K$ 的验算可由生成元导出

lemma 2: $X \subseteq L$. $H = [X]$ 为 L 子代数, K 为 L 子空间.

则 $[X K] \subseteq K \Leftrightarrow [H K] \subseteq K$

pf: $[x K], [y K] \subseteq K \Rightarrow [[x y] K] = [x [y K]] + [[x K] y] \subseteq K$.

※. 特别地, 验证 $K \lhd L$ 只须用 L 生成元验算

③ . prop: 如下性质成立.

(1) $\tilde{L}(A) = \tilde{N}^- \oplus \tilde{H} \oplus \tilde{N}^+$

(2) $\widetilde{N}^+=\widetilde{L}(A)^+$, $\widetilde{N}^-=\widetilde{L}(A)^-$, $\widetilde{H}=\widetilde{L}(A)$。

(3) $\widetilde{L}(A)$ 的非零权落在 Q^+, Q^- 上.

Pf: (1) 由 lemma: $[h_i e_j]=A_{ij}e_j\in N^+ \Rightarrow [\widetilde{H},\widetilde{N}^+]\subseteq\widetilde{N}^+$

$\Rightarrow [\widetilde{H}+\widetilde{N}^+,\widetilde{H}+\widetilde{N}^+]\subseteq[\widetilde{H},\widetilde{H}]+[\widetilde{N}^+,\widetilde{H}]+[\widetilde{N}^+,\widetilde{N}^+]\subseteq\widetilde{N}^+$

$\Rightarrow \widetilde{H}+\widetilde{N}^+\leq\widetilde{L}(A)$

同理 $\widetilde{H}+\widetilde{N}^-\leq\widetilde{L}(A)$

由 $[e_i f_j]=\begin{cases}h_i, & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ $\Rightarrow [e_i f_j]\in\widetilde{H}$

$\forall x,y\in\widetilde{N}^-$ s.t. $[e_i x],[e_i y]\in\widetilde{H}+\widetilde{N}^-$

有 $[e_i[xy]]=[[e_i x]y]+[x[e_i y]]$

$\in[\widetilde{H}+\widetilde{N}^-,\widetilde{N}^-]+[\widetilde{N}^-,\widetilde{H}+\widetilde{N}^-]\subseteq\widetilde{H}+\widetilde{N}^-$

$\Rightarrow [e_i,\widetilde{N}^-]\subseteq\widetilde{H}+\widetilde{N}^-$

同理 $[f_j,\widetilde{N}^+]\subseteq\widetilde{H}+\widetilde{N}^+$

$\Rightarrow [e_i,\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+]=[e_i,\widetilde{N}^-]+[e_i,\widetilde{H}+\widetilde{N}^+]\subseteq\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+$

$[f_i,\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+]=[f_i,\widetilde{N}^+]+[f_i,\widetilde{H}+\widetilde{N}^-]\subseteq\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+$

而显然有: $[h_i,\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+]\subseteq\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+$

由 lemma2, 有 $\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+\lhd\widetilde{L}(A)$

$\Rightarrow \widetilde{L}(A)=\langle f_i,h_i,e_i\rangle\subseteq\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+$

$\Rightarrow \widetilde{L}(A)=\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+=\widetilde{N}^-\oplus\widetilde{H}\oplus\widetilde{N}^+$

权空间分解直和性

(2): 由 $\widetilde{N}^+\subseteq\widetilde{L}(A)^+$, $\widetilde{N}^-\subseteq\widetilde{L}(A)^-$ 之证.

(3): $\widetilde{L}(A)^+$ 权向量均在 Q^+ 上, $L(A)^-$ 权向量均在 Q^- 上.

简证: ① 注意到 $e_i, f_i, h_i\subseteq\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+$, 只须证其为子代数.

② 由 $[\widetilde{L}(A),\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+]\subseteq\widetilde{N}^-+\widetilde{H}+\widetilde{N}^+$, 导出其为子理想.

note: 生成元之间关系 vs 代数之间关系.

$[xz]$，$[yz]$ 已知 $\Rightarrow \underbrace{[[xy]z]}_{x,y\text{生成部分}} = \underbrace{[x[yz]]}_{\text{先}y\text{后}x} + \underbrace{[[xz]y]}_{\text{先}x\text{后}y}$

note2：设 K 为 L 子空间，$x \subseteq K$ s.t. $K \subseteq [x]$.

则 $K \leq L \Leftrightarrow K = [x] \Leftrightarrow [x, K] \subseteq K$

即只须验证 x 对 K 作用封闭。

推论：$\forall \mu \in Q^+$，有 $\tilde{L}(A)_\mu = \langle \mathrm{ad}\, e_{i_1} \cdot \mathrm{ad}\, e_{i_2} \cdots \mathrm{ad}\, e_{i_{N-1}} \cdot e_{i_N} \mid \sum_{k=1}^{N} \alpha_{i_k} = \mu \rangle$.

pf：$\tilde{L}(A)^+ = \tilde{N}^+ = \langle \mathrm{ad}\, e_{i_1} \cdots \mathrm{ad}\, e_{i_{r-1}} \cdot e_{i_r} \rangle$

其中 $\mathrm{ad}\, e_{i_1} \cdots \mathrm{ad}\, e_{i_{r-1}} \cdot e_{i_r} \in \tilde{L}(A)_\lambda$，$\lambda = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i_k}$

$\forall x \in \tilde{L}(A)_\mu$，有 $x \notin \sum_{\lambda \neq \mu} \tilde{L}(A)_\lambda$ （有限和，不影响讨论）

取 x 在 $\{\mathrm{ad}\, e_{i_1} \cdots \mathrm{ad}\, e_{i_{r-1}} \cdot e_{i_r}\}$ 下的唯一表示

$\Rightarrow x$ 在 $\{\mathrm{ad}\, e_{i_1} \cdot \mathrm{ad}\, e_{i_2} \cdots \mathrm{ad}\, e_{i_{N-1}} \cdot e_{i_N} \mid \sum_{k=1}^{N} \alpha_{i_k} = \mu\}$ 外的部分为零 #

note：由 $\{\alpha_i\}$ 线性无关 $\Rightarrow \mu = \sum n_i \alpha_i$ 表示唯一

$\Rightarrow \{e_{i_1}, \cdots, e_{i_N}\}$ 不记顺序下唯一

(4). $\dim \tilde{L}(A)_{\alpha_i} = \dim \tilde{L}(A)_{-\alpha_i} = 1$

pf：由 $\rho(e_i) \neq 0 \Rightarrow e_i \neq 0$

又 $e_i \in \dim \tilde{L}(A)_{\alpha_i} \Rightarrow \dim \tilde{L}(A)_{\alpha_i} \geq 1$

由上述推论，$\tilde{L}(A)_{\alpha_i} = \langle e_i \rangle = \{k e_i \mid k \in \mathbb{C}\}$，

$\tilde{L}(A)_{-\alpha_i}$ 同理

note：$\rho(e_i) f_{i_1} \cdots f_{i_r} = \sum_{k=1}^{r} f_{i_1} \cdots f_{i_{k-1}} [e_i f_{i_k}] \cdots f_{i_r}$.

由 $\rho(e_i) f_i f_i = h_i f_i = -A_{ii} f_i \neq 0$. $\Rightarrow \rho(e_i) \neq 0$. $\Rightarrow e_i \neq 0$.

即这里 $\rho(e_i) \neq 0$ 用到条件 A_{ij} 对角线非零.

推论：$\dim \tilde{L}(A)_{\alpha_i + \alpha_j} \leq 1$，取等当且仅当 $[e_i e_j] \neq 0$.

note：$\rho([e_i e_j]) = 0 \not\Rightarrow [e_i e_j] = 0$.

Cpt 2.5. 存在性理论

1、$L(A)$ 的三角分解

① 一些记号

令 $X_{ij}=(\mathrm{ad}\,e_i)^{1-A_{ij}}(e_j)$, $Y_{ij}=(\mathrm{ad}\,f_i)^{1-A_{ij}}e_j$, $i\neq j$

令 $I=\langle\{X_{ij},Y_{ij}\}\rangle \Rightarrow L(A)=\tilde{L}(A)/I$

令 $I^+=\langle\{X_{ij}\}\rangle$, 为 $\tilde{N}^+$ 上 $\{X_{ij}\}$ 生成的子理想.

$I^-=\langle\{Y_{ij}\}\rangle$ 为 $\tilde{N}^-$ 上 $\{Y_{ij}\}$ 生成的子理想.

② 性质: $\forall i\neq j$ 和 k, 有 $[f_k X_{ij}]=[e_k Y_{ij}]=0$

Pf: $A_{ij}=0$ 时, $X_{ij}=[e_i e_j]$

$[f_k,X_{ij}]=[f_k[e_i e_j]]=[[f_k e_i],e_j]+[e_i[f_k e_j]]$

$=\delta_{ik}\cdot[h_i e_j]+\delta_{jk}\cdot[e_i h_j]$

$=\delta_{ik}\cdot A_{ij}e_j-\delta_{jk}A_{ij}e_j=0.$

$A_{ij}\neq 0$ 时, 有 $A_{ij}\leq -1 \Rightarrow r=1-A_{ij}\geq 2$

$[f_k X_{ij}]=\mathrm{ad}f_k\cdot(\mathrm{ad}e_i)^r\cdot e_j$

$k\neq i \Rightarrow \mathrm{ad}f_k$ 与 $\mathrm{ad}e_i$ 可交换

$\Rightarrow \mathrm{ad}f_k\cdot(\mathrm{ad}e_i)^r e_j=(\mathrm{ad}e_i)^r\,\mathrm{ad}f_k\,e_j$

$=\delta_{jk}(\mathrm{ad}e_i)^r\cdot h_j$

$=\delta_{jk}(\mathrm{ad}e_i)^{r-2}\cdot(\underbrace{[e_i[e_i h_j]]}_{0})$

$=0$

$k=i$ 时, 归纳证 $\mathrm{ad}f_i(\mathrm{ad}e_i)^r\cdot e_j=-r(A_{ij}+r-1)(\mathrm{ad}e_i)^{r-1}\cdot e_j$

$r=1$ 时, $[f_i[e_i e_j]]=[[f_i e_i]e_j]+[e_i[f_i e_j]]$

$=[h_i e_j]=A_{ij}e_j$

r 成立时, 对 $r+1$,

$\mathrm{ad}f_i\cdot(\mathrm{ad}e_i)^{r+1}\cdot e_j=(\mathrm{ad}[f_i e_i]+\mathrm{ad}e_i\,\mathrm{ad}f_i)(\mathrm{ad}e_i)^r\cdot e_j$

$=\mathrm{ad}h_i\cdot(\mathrm{ad}e_i)^r e_j+\mathrm{ad}e_i\cdot\mathrm{ad}f_i(\mathrm{ad}e_i)^r\cdot e_j$

$= -(r\cdot A_{ii} + A_{ij})(\mathrm{ad}\,e_i)^r e_j - r(A_{ij}+r-1)\,\mathrm{ad}\,e_i\cdot(\mathrm{ad}\,e_i)^{r-1}\cdot e_j$

$= -(2r + A_{ij} + rA_{ij} + r^2 - r)(\mathrm{ad}\,e_i)^r\cdot e_j$

$= -(r+1)(A_{ij}+r)(\mathrm{ad}\,e_i)^r\cdot e_j$

此时 $r = 1 - A_{ij}$，$\Rightarrow [f_i x_{ij}] = \mathrm{ad}\,f_i(\mathrm{ad}\,e_i)^r e_j = -r(A_{ij}+r-1)(\mathrm{ad}\,e_i)^{r-1} e_j$

$= 0.$ #

注：(1) $\mathrm{ad}\,x\cdot\mathrm{ad}\,y = \mathrm{ad}[xy] + \mathrm{ad}\,y\cdot\mathrm{ad}\,x$，$[f_k e_i] = \delta_{ik} h_i$

(2) $\mathrm{ad}\,e_0\cdot\mathrm{ad}\,e_1\cdots\mathrm{ad}\,e_r\cdot e$

$= \mathrm{ad}\,e_1\,\mathrm{ad}\,e_0\cdots\mathrm{ad}\,e_r\,e + \mathrm{ad}[e_0 e_1]\cdot\mathrm{ad}\,e_2\cdots\mathrm{ad}\,e_r\cdot e$

$= \cdots$

$= \mathrm{ad}[e_0 e_1]\cdot\mathrm{ad}\,e_2\cdots\mathrm{ad}\,e_r\cdot e$

$+ \mathrm{ad}\,e_1\cdot\mathrm{ad}[e_0 e_2]\cdot\mathrm{ad}\,e_3\cdots\mathrm{ad}\,e_r\cdot e$

$+ \cdots$

$+ \mathrm{ad}\,e_1\cdot\mathrm{ad}\,e_2\cdots\mathrm{ad}\,e_{r-1}\cdot\mathrm{ad}[e_0 e_r]\,e$

$+ \mathrm{ad}\,e_1\cdot\mathrm{ad}\,e_2\cdots\mathrm{ad}\,e_r\cdot\mathrm{ad}\,e_0\cdot e.$

③ 相关推论：

(1) $I^+, I^- \trianglelefteq \tilde{L}(A)$，且 $I = I^+ \oplus I^-$

(2) $L(A) = \tilde{L}(A)/I = (\tilde{N}^+ \oplus \tilde{H} \oplus \tilde{N}^-)/(I^+ \oplus I^-)$

$= (\tilde{N}^+/I^+) \oplus \tilde{H} \oplus (\tilde{N}^-/I^-)$

$= N^+ \oplus H \oplus N^-$

并称该分解为 $L(A)$ 的三角分解

pf：(1)：$\tilde{L}(A) = \langle \{e_i, f_i, h_i\}\rangle$，

又 $I^+ = \langle\{x_{ij}\}\rangle$ 且 $\begin{cases} [f_k x_{ij}] \in I^+ \\ [h_k x_{ij}] = ((1-A_{ij})\cdot A_{ki} + A_{kj})\,x_{ij} \in I^+ \\ [e_k x_{ij}] \in I^+ \end{cases}$

由上节 5.② 引理，$[\tilde{L}(A), I^+] \subseteq I^+$.

同理 $[\tilde{L}(A), I^-] \subseteq I^- \Rightarrow I^+ + I^- \lhd \tilde{L}(A)$

又 $I^+ + I^- \subseteq I = \langle \{x_{ij}, y_{ij}\} \rangle \subseteq I^+ + I^-$

$\Rightarrow I^+ + I^- = I$，再由 $I^- \subseteq \tilde{N}^-$，$I^+ \subseteq \tilde{N}^+ \Rightarrow I = I^- \oplus I^+$

(2)：易证：$L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$，$I = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ 且 $I_k \lhd L_k$，

$\Rightarrow L/I = (L_1/I_1) \oplus \cdots \oplus (L_r/I_r)$

2. $L(A)$ 的权空间分解和维数.

(1)、考虑 $L(A)$ 的权空间分解. 对 $\mu \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C})$ 为 H 的权，

$L(A)_\mu = \{x \in L(A) \mid (\mathrm{ad}\,h - \mu(h))x = 0, \forall h \in H\}$ 为 μ 的权空间.

且有分解：$L(A) = \bigoplus_\mu L(A)_\mu$.

注：由 $L(A) = \tilde{L}(A)/I = (\tilde{N}^+/I^+) \oplus \tilde{H} \oplus (\tilde{N}^-/I^-) = N^+ \oplus H \oplus N^-$

$\Rightarrow L(A)$ 中 H 为交换子代数，以 $\{h_i\}$ 为基，

N^+, N^- 分别由 $\{e_i\}$，$\{f_i\}$ 生成.

Pf：由上一节 $\tilde{L}(A)$ 权空间分解证明的指定证.

note：即若 H 模 V 由 H 的权向量生成，则 V 有权空间分解.

这里 H 可以为一般 Lie 模，利用 $(\mathrm{ad}\, e)^n [xy]$ 展开式证明.

(2). $\dim L(A)_{\alpha_i} = \dim L(A)_{-\alpha_i} = 1$

Pf：由 $L(A) = \tilde{L}(A)/I \Rightarrow L(A)$ 的权向量均为 $\tilde{L}(A)$ 的权向量

$\Rightarrow \dim L(A)_\mu \leq \dim \tilde{L}(A)_\mu$, $\forall \mu \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C})$

故 $\dim L(A)_{\alpha_i} \leq 1$,

由 $L(A) = (\tilde{N}^+/I^+) \oplus \tilde{H} \oplus (\tilde{N}^-/I^-)$, $= N^+ \oplus H \oplus N^-$

其中 $I^+ = \langle \{x_{ij}\} \rangle$ 由权向量生成 $\Rightarrow I^+$ 有权空间分解

而 $x_{ij} \in L(A)_{\alpha_{ij}}$ 中，$\alpha_{ij} = \sum n_i \alpha_i$，其中 $\{n_i\}$ 至少两项非零.

$\Rightarrow \alpha_i$ 不为 I^+ 分解中的权，

$\Rightarrow e_{\alpha_i} \notin I^+$，$\Rightarrow e_{\alpha_i} + I^+$ 不为 $\tilde{N}^+/I^+$ 中零元

$\Rightarrow e_{\alpha_i}$ 在 $L(A)$ 上非零，且 $e_{\alpha_i} \in L(A)_{\alpha_i}$

$\Rightarrow \dim L(A)_{\alpha_i}=1$，同理 $\dim L(A)_{-\alpha_i}=1$.

note：我们希望，将代数信息推进到一般李上，为此，先引入反射.

③. $\mathrm{ad}e_i: L(A)\to L(A)$ 与 $\mathrm{ad}f_i: L(A)\to L(A)$ 均为局部幂零元.

（$\mathrm{ad}x$ 局部幂零，指 $\forall y\in L$，$\exists n(y)$，s.t. $(\mathrm{ad}x)^{n(y)}y=0$）

pf: $(\mathrm{ad}e_i)^{n(x)}x=0$，$(\mathrm{ad}e_i)^{n(y)}=0$，

由 $(\mathrm{ad}e_i)^n[xy]=\sum_{r=0}^{n}C_n^r[(\mathrm{ad}e_i)^r x,(\mathrm{ad}e_i)^{n-r}y]$

当 $n\geq n(x)+n(y)$ 时，$(\mathrm{ad}e_i)^n[xy]=0$

故只须在 $\mathrm{ad}e_i$ 零化 $L(A)$ 生成元.

由 $\begin{cases}\begin{cases}\mathrm{ad}e_i\cdot e_i=0\\ (\mathrm{ad}e_i)^{1-A_{ij}}e_j=0\end{cases}\\ (\mathrm{ad}e_i)^2h_j=0\\ \begin{cases}(\mathrm{ad}e_i)^3f_i=(\mathrm{ad}e_i)^2h_i=0.\\ (\mathrm{ad}e_i)f_j=0,\ j\neq i.\end{cases}\end{cases}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{ad}e_i$ 零化 $L(A)$ 的生成元，故 $\mathrm{ad}e_i$ 局部幂零. $\mathrm{ad}f_i$ 同理.

note：令 $n=\max\{1-A_{ij}\}+3$，则 $(\mathrm{ad}e_i)^n$ 零化 $\{e_i,f_i,h_i\}$.

但 $\dim L=\infty$ 时，不能保证 $\mathrm{ad}e_i$ 为整体幂零元.

④. $\mathrm{ad}e_i$，$\mathrm{ad}f_i$ 局部幂零 $\Rightarrow$ $e^{\mathrm{ad}e_i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}e_i)^k}{k!}$，$e^{\mathrm{ad}f_i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ad}f_i)^k}{k!}$

均为 $L(A)$ 上自同构，

令 $\theta_i=e^{\mathrm{ad}e_i}\circ e^{\mathrm{ad}\text{-}f_i}\circ e^{\mathrm{ad}e_i}$，则有

(1) $\theta_i(H)=H$

(2) 令 $S_i: H\to H$，则 $\theta_i|_H=S_i$

$h_j\mapsto h_j-A_{ji}h_i$

pf: $e^{\mathrm{ad}e_i}h_j=(1+\mathrm{ad}e_i)h_j=h_j-A_{ji}e_i$

$e^{\mathrm{ad}\text{-}f_i}(h_j-A_{ji}e_i)=(1+\mathrm{ad}\text{-}f_i+\frac{1}{2}(\mathrm{ad}\text{-}f_i)^2)(h_j-A_{ji}e_i)$

$=h_j-A_{ji}e_i-A_{ji}f_i-A_{ji}h_i+A_{ji}f_i$

$$= h_j - A_{ji} h_i - A_{ji} e_i$$

$$e^{\operatorname{ad} e_i}(h_j - A_{ji}h_i - A_{ji}e_i) = (1+\operatorname{ad} e_i)(h_j - A_{ji}h_i - A_{ji}e_i)$$

$$= h_j - A_{ji}h_i - A_{ji}e_i - A_{ji}e_i + 2A_{ji}e_i$$

$$= h_j - A_{ji}h_i$$

于是 (1), (2) 得证.

note: Lie代数中, $S_i = S_{\alpha_i} \Rightarrow S_i(h) = h - \frac{2\langle h'_{\alpha_i}, h\rangle}{\langle h'_{\alpha_i}, h'_{\alpha_i}\rangle} h'_{\alpha_i}$

$$= h - \langle h'_{\alpha_i}, h\rangle h_i$$

特别地, $S_i(h_j) = h_j - \langle h'_{\alpha_i}, h_j\rangle h_i$

$$= h_j - \frac{2\langle h'_{\alpha_i}, h'_{\alpha_j}\rangle}{\langle h'_{\alpha_j}, h'_{\alpha_j}\rangle} \cdot h_i$$

$$= h_j - A_{ji} h_i$$

另: $S_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j - \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle} \cdot \alpha_i = \alpha_j - A_{ij}\alpha_i$

但 上边 取了 $h_i = \frac{2h'_{\alpha_i}}{\langle h'_{\alpha_i}, h'_{\alpha_i}\rangle}$, 因而 所得 为 A_{ji} 而非 A_{ij}.

推论: S_i 作成 H 上自同构.

Q: θ_i 定义怎么得到了. 前面推论只给了 H上反射, 没对应到L上反射!!

⑤. recall: S_i 作用在 H^* 上, 可自然视为作用在 H 上.

反之: 已知 $S_i: H \to H \Rightarrow S_i: H^* \to H^*$

$h_j \mapsto h_j - A_{ji}h_i \qquad \mu \mapsto S_i\mu$

其中 $S_i\mu$ s.t. $S_i\mu(H) = \mu(S_i^{-1}H)$

prop: 对 $\theta_i := e^{\operatorname{ad} e_i} \circ e^{\operatorname{ad} f_i} \circ e^{\operatorname{ad} e_i} \in \operatorname{Aut} L(A)$, 有 $\theta_i(L(A)_\mu) = L(A)_{S_i\mu}$,

于是 $\dim L(A)_\mu = \dim L(A)_{S_i\mu}$

pf: $\forall\, x \in L(A)_\mu, h \in H$, 由 θ_i 自同构性,

$$[\theta_i h, \theta_i x] = \theta_i([h, x]) = \theta_i(\mu(h)x) = \mu(h)\cdot\theta_i x$$

$$\Rightarrow [h, \theta_i x] = [\theta_i\theta_i^{-1}h, \theta_i x] = \mu(\theta_i^{-1}h)\cdot\theta_i x$$

$\theta_i|_H = \mu$

$$= \mu(S_i^{-1}h)\cdot\theta_i x$$

S_i 对H^*作用定义

$$= (S_i\mu)(h)\cdot\theta_i x$$

$\Rightarrow \theta_i X \in L(A)_{s_i\mu}$.

$\Rightarrow \theta_i(L(A)_\mu) \subseteq L(A)_{s_i\mu}$，同理 $\theta_i^{-1}(L(A))_{s_i\mu} \subseteq L(A)_\mu$，#

推论：令 $W=\langle\{s_i\}\rangle$，$\Pi=\{\alpha_i\}$，$\Phi=W\Pi$

则有 $\dim L(A)_\alpha=1$，$\forall \alpha\in\Phi$

3、构造内积

⓪ 我们希望证明 $\dim L(A)<\infty$，为此先证明 $|W|<\infty$

Lie代数中，$W=\langle s_i\rangle$，作用在 $H_\mathbb{R}=\mathbb{R}h_1+\cdots+\mathbb{R}h_l$ 上

其内积由 L 上 Killing 型限制到 $H_\mathbb{R}$ 上得到，但我们现在没有Killing型，为此利用 Cartan 阵来定义内积

①. Cartan 阵 A 可作分解，满足下面性质

(1) $A=DB$，其中 $D=diag(d_1,\cdots,d_l)$ 为对角阵，且 $d_i\in\{1,2,3\}$，

B 为对称矩阵

(2) 设 A 对应 Dynkin 图为 Γ，

若 Γ 只有一重边 $\Rightarrow d_i=1$，$\forall i$

若 Γ 有二重边 $\Rightarrow d_i=\begin{cases}1, & 若\ \alpha_i\ 为长根\\ 2, & 若\ \alpha_i\ 为短根\end{cases}$

若 Γ 有三重边 $\Rightarrow d_i=\begin{cases}1, & 若\ \alpha_i\ 为长根\\ 3, & 若\ \alpha_i\ 为短根\end{cases}$

Pf：对 A_l, D_l, E_6-E_8，令 D 为单位阵，则 $B=A$ 本身即为对称阵

对 B_l, C_l, F_4, G_2，$B=D^{-1}A$，B 唯一确定，且为三对角的对称阵.

②. 定义 $H_\mathbb{R}$ 上双线性型：$\langle h_i, h_j\rangle = d_i\cdot d_j\cdot B_{ij}$

则 $\langle,\rangle$ 作成内积、即 $\{h_i\}$ 的内积阵 $(\langle h_i,h_j\rangle)=DBD$ 正定

Pf：由 B 对称性 $\Rightarrow DBD=DBD^T$ 对称.

又 $A=DB \Rightarrow A_{ij}=d_iB_{ij} \Rightarrow n_{ij}=A_{ij}\cdot A_{ji}=d_iB_{ij}^2d_j$

由 $\{B_{ii}>0$，$\forall i$，$\Rightarrow \{\sqrt{n_{ii}}=\sqrt{d_i}\cdot\sqrt{d_i}\cdot B_{ii}$，$\forall i$

$B_{ij}\le 0,\ \forall i\ne j$, $\quad -\sqrt{n_{ij}} = \sqrt{d_i}\cdot\sqrt{d_j}\cdot B_{ij},\ i\ne j$.

$\Rightarrow$

$$DBD = (d_i B_{ij} d_j) = \begin{pmatrix}\sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{n_{ii}} & & -\sqrt{n_{ij}} \\ & \ddots & \\ -\sqrt{n_{ij}} & & \sqrt{n_{ii}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n}\end{pmatrix}$$

又 $\begin{pmatrix}\sqrt{n_{ij}} & & -\sqrt{n_{ij}} \\ & \ddots & \\ -\sqrt{n_{ij}} & & \sqrt{n_{ij}}\end{pmatrix}$ 对称正定 $\Rightarrow$ DBD对称正定.

③. W 保 $H_{\mathbb{R}}$ 上内积 $\qquad \Sigma(a)$ 中 $\{\alpha_i\}$ 线性

Pf: 由 $\langle h_i, h_j\rangle = d_i d_j B_{ij} = d_i A_{ji} = d_i\,\alpha_i(h_j)$

$\Rightarrow \langle h_i, x\rangle = d_i\,\alpha_i(x),\ \forall i$.

由 $S_i(h_j) = h_j - A_{ji} h_i = h_j - \alpha_i(h_j) h_i$

$\Rightarrow S_i x = x - \alpha_i(x) h_i$

$\Rightarrow \langle S_i x, S_i y\rangle = \langle x - \alpha_i(x) h_i,\ y - \alpha_i(y) h_i\rangle$

$= \langle x, y\rangle - \alpha_i(x)\langle h_i, y\rangle - \alpha_i(y)\langle x, h_i\rangle + \alpha_i(x)\alpha_i(y)\langle h_i, h_i\rangle$

$= \langle x, y\rangle - 2 d_i \alpha_i(x)\alpha_i(y) + d_i A_{ii}\alpha_i(x)\alpha_i(y)$

$= \langle x, y\rangle$.

note: Lie代数中, $A_{ij}\cdot A_{ji} = 4\cos^2(\alpha_i,\alpha_j) = d_i B_{ij}^2 d_j$

$\Rightarrow 2\cos(\alpha_i,\alpha_j) = (\sqrt{d_i}\cdot B_{ij}\sqrt{d_j})$

$\Rightarrow \langle h_i, h_j\rangle = \frac{1}{2}\cdot|h_i|\cdot\sqrt{d_i}\cdot B_{ij}\cdot\sqrt{d_j}\cdot|h_j|$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{|\alpha_i|}\cdot\frac{2}{|\alpha_j|}\cdot\sqrt{d_i}\cdot\sqrt{d_j}\cdot B_{ij}$

现由 $\langle h_i, h_j\rangle = d_i d_j B_{ij} \Rightarrow \sqrt{d_i} = \frac{\sqrt{2}}{|\alpha_i|},\ \sqrt{d_j} = \frac{\sqrt{2}}{|\alpha_j|}$

$\Rightarrow |\alpha_i| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{d_i}}$,

再由 d_i 定义, $|\alpha_i|$ 目标 $\Rightarrow |\alpha_i| \in \{\sqrt{2}, 1, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\}$.

Q: 二次型 $\langle,\rangle$ 诱导 $H\to H^*$, $\Rightarrow |\alpha_i|$ 计算公式

Q：仅知道 H 上群反射，能否确定 H 上内积.

4、W 有限性.

①. 令 $H_i = \{x \in H_{\mathbb{R}} \mid \langle h_i, x\rangle = 0\}$. 即 h_i 垂直空间

$H_i^+ = \{x \in H_{\mathbb{R}} \mid \langle h_i, x\rangle > 0\}$

$H_i^- = \{x \in H_{\mathbb{R}} \mid \langle h_i, x\rangle < 0\}$

令 $C = H_1^+ \cap \cdots \cap H_l^+$，称为基本室 (fundamental chamber)

令 $W_{ij} = \langle S_i, S_j\rangle$，$i \neq j$. 则 $o(S_i \cdot S_j) = m_{ij}$，其中 $2\cos\frac{\pi}{m_{ij}} = \sqrt{n_{ij}}$

Pf：$A = DB \Rightarrow \langle h_i, h_j\rangle = d_i d_j B_{ij}$ 作为 $H_{\mathbb{R}}$ 上内积

且有 S_i, S_j 作成 $H_{\mathbb{R}}$ 上反射，$S_i h_i = -h_i$，$S_j h_j = -h_j$

设 $m_{ij} = o(S_i \cdot S_j)$，

由二面体群性质，$\cos(\pi - \frac{\pi}{m_{ij}}) = \cos\langle h_i, h_j\rangle = \frac{\langle h_i, h_j\rangle}{|h_i||h_j|}$

$= \frac{d_i \cdot d_j \cdot B_{ij}}{\sqrt{2d_i} \cdot \sqrt{2d_j}} = \frac{1}{2}\sqrt{d_i} \cdot \sqrt{d_j} \cdot B_{ij}$

$= \frac{-1}{2}\sqrt{A_{ij} \cdot A_{ji}} = \frac{-1}{2}\sqrt{n_{ij}}$ #

note：$i \neq j \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{n_{ij}} \in \{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

$\Rightarrow m_{ij} = \{2, 4, 6\}$

$\Rightarrow |W_{ij}| = 2m_{ij} \leq 12$.

②. W 由反射生成，且 $o(S_i \cdot S_j)$ 可由 n_{ij} 得到.

于是，Dynkin 图可自然化作 Coxeter 图.

由 Dynkin 图中正定性 $\Rightarrow$ Coxeter 正定性

$\Rightarrow |W| < \infty$. $|\Phi| < \infty$.

note：P112 — P115，lemma 7.26，prop 7.27—7.30，

皆在证明 $|W|$，$|\Phi| < \infty$，一副浅略去.(感兴趣可再看)

且.反过来，这里的方法亦可用于做 Coxeter 图的分类.

5、$L(A)$ 的 Cartan 分解.

recall：$\forall \mu \in Q^+$，有 $\tilde{L}(A)_\mu = \mathrm{span}\{\mathrm{ad}\, e_{i_1} \cdot \mathrm{ad}\, e_{i_2} \cdots \cdot \mathrm{ad}\, e_{i_{N-1}} \cdot e_{i_N} \mid \sum_{k=1}^{N} \alpha_{i_k} = \mu\}$

注: $\tilde{L}(A)^+ = N^+ = \langle \{e_i\} \rangle$, $\{e_i\}$ Lie 括号下所得均为权向量.

非零权向量 x, y s.t. $x+y$ 为权向量, iff x, y 同权

(1). $\forall \mu \in H^*$ s.t. $\mu \neq 0$ 且 $\mu \notin \Phi$, 则 $L(A)_\mu = 0$

Pf: 设 $\mu \in H^*$, s.t. $L(A)_\mu \neq 0$, 由 $\dim L(A)_\mu \leq \dim \tilde{L}(A)_\mu$

$\Rightarrow \mu \in Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$.

反设 $\mu \notin \Phi$ 且 $\mu \neq 0$,

(1). $\forall \alpha_i \in \Pi$, 由 $\tilde{L}(A)_{n\alpha_i} = \mathrm{span}\{(\mathrm{ad}\, e_i)^{n-1} e_i\} = 0$, $n \geq 2$

$\Rightarrow \dim L(A)_{n\alpha_i} \leq \dim \tilde{L}(A)_{n\alpha_i} = 0$, $n \geq 2$

由 $W\Pi = \Phi$, $\dim L(A)_\mu = \dim L(A)_{w\mu} \Rightarrow \dim L(A)_{n\alpha} = 0$, $\forall n \geq 2, \alpha \in \Phi$

于是 $\mu \neq n\alpha$, $n \geq 2$, $\alpha \in \Phi$

(2) 令 $H_\mu = \{h \in H_{\mathbb{R}} \mid \mu(h) = 0\}$,

$H_\alpha = \{h \in H_{\mathbb{R}} \mid \alpha(h) = 0\}$, $\alpha \in \Phi$.

$\Rightarrow H_\mu \neq H_\alpha$, $\forall \alpha \in \Phi$, 故 $H_\alpha \cap H_\mu$ 为 H_μ 真子空间.

$\Rightarrow H_\mu \neq \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha \cap H_\mu$, 继而 $H_\mu \not\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$

$\Rightarrow \exists h \in H_{\mathbb{R}}$, s.t. $\mu(h) = 0$, $\alpha(h) \neq 0$, $\forall \alpha \in \Phi$

由 $W \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$, $\Rightarrow \forall w \in W$, $wh \notin \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$

断言 $\exists w \in W$, s.t. $\alpha_i(w(h)) > 0$, $\forall \alpha_i \in \Pi$ (反射群中的基本域)

设 $h = \sum_i n_i h_i$, 令 $ht(h) = \sum_i n_i$, 称为 h 的高度.

由 $|W| < \infty \Rightarrow \exists w$, s.t. wh 高度取到最大.

又 $s_i(wh) = wh - \alpha_i(wh) \cdot h_i$, $\forall i$

$\Rightarrow ht(s_i wh) = ht(wh) - \alpha_i(wh) \leq ht(wh)$, $\forall i$

又 $\alpha_i(wh) \neq 0 \Rightarrow \alpha_i(wh) > 0$, $\forall i$

设 $w\mu = \sum_i m_i \alpha_i$, $\mu \neq 0 \Rightarrow m_i$ 不全为 0.

由 $(w\mu)(wh) = \mu(w^{-1}wh) = \mu(h) = 0$,

$\Rightarrow 0 = w\mu(wh) = \sum_i m_i \alpha_i(wh)$

又 $\alpha_i(wh)>0 \Rightarrow \exists\, i,j$, s.t. $m_i>0>m_j$

$\Rightarrow w\mu \notin Q^+\cup Q^-$

$\Rightarrow \dim L(A)_\mu = \dim L(A)_{w\mu} \le \dim \tilde{L}(A)_{w\mu} = 0$ 矛.

简证: (1) $L(A)_\mu\ne 0 \Rightarrow \mu\in Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$ 　 + 同 $\tilde{L}(A)_\mu$ 限至 μ.

(2) $\tilde{L}(A)_\mu\ne 0 \Rightarrow \mu\ne n\alpha,\ n\ge 2,\alpha\in\Phi$

$\Rightarrow H_\mu\ne H_\alpha,\ \forall\alpha\in\Phi$. 　 } $\Rightarrow$ 不为 $n\alpha$.

$\Rightarrow \exists\, h\in H_{\mathbb{R}}$, s.t. $h\in H_\mu\setminus(\bigcup_{\alpha\in\Phi}H_\alpha)$

(3) 由基本域, $\exists\, w\in W$, s.t. $wh\in C$, 即 $\forall\alpha_i\in S_\Pi$, $\alpha_i(wh)>0$

$\Rightarrow 0 = w\mu(wh) = \sum_i m_i\alpha_i(wh)$ 　 } $\mu\notin n\Phi$

$\Rightarrow \exists\, i,j,\ m_i>0>m_j$ 　 $\Rightarrow w\mu\notin Q^+\cup Q^-$

$\Rightarrow w\mu\notin Q^+$

其中基本域性质直接对 ht 归纳.

推论: (1). $L(A) = H\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}L(A)_\alpha$

(2) $\dim L(A) = l+|\Phi|$

Pf: (1) $\tilde{L}(A)_0 = \tilde{H} \Rightarrow L(A)_0 = H$

$\dim L(A)_\alpha = 1$, $\alpha\in\Phi$ 且 $\dim L(A)_\mu = 0$, $\mu\notin\{0\}\cup\Phi$

$\Rightarrow L(A) = \bigoplus_\mu L(A)_\mu = H\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}L(A)_\alpha$.

(2) 由 $\dim H = l$, $\dim L(A)_\alpha = 1$ 立见.

② $L(A)$ 为半单 Lie 代数.

Pf: 设 R 为 $L(A)$ 的可解根, 则有理想链 $R = R^{(0)}\supseteq\cdots\supseteq R^{(n)} = 0$.

($I, J\lhd L \Rightarrow [I,J]\lhd L$, 于是该链为理想链)

由 R 唯一性, L 的任一自同构保 R 不变.

而 $R^{(k)}$, $k=0,\cdots,n$ 由 R 生成, 故 $R^{(k)}$ 在自同构下不变.

反设 $L(A)$ 非半单, 即 $R\ne 0$, 于是 $n\ge 1$

令 $I = R^{(n-1)}\ne 0$, 则有 $I^2 = 0$,

$I \lhd L \Rightarrow I$ 为 L 模 $\Rightarrow I$ 为 H 模,

$\dim I < \infty \Rightarrow I$ 有权空间分解 $I = \bigoplus_{\mu} I_{\mu}$,

由 $I \le L \Rightarrow \mu \in \Phi \cup \{0\}$

$\Rightarrow I_{\mu} \subseteq H$ 或 $I_{\mu} = L(A)_{\mu}$, $\mu \in \Phi$

$\Rightarrow I = (H \cap I) \oplus \sum_{\alpha \in \Phi_0} L(A)_{\alpha}$, 其中 $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

若 $\Phi_0 \ne \emptyset$, 设 $\alpha \in \Phi_0$

recall: $\theta_i := e^{\operatorname{ad} e_i} \circ e^{\operatorname{ad} -f_i} \circ e^{\operatorname{ad} e_i} \in \operatorname{Aut} L(A)$ s.t. $\theta_i(L(A)_{\mu}) = L(A)_{s_i \mu}$,

由 $\theta_i I = I \Rightarrow \theta_i L(A)_{\alpha} = L(A)_{\theta_i \alpha} \subseteq I$, 即 $\theta_i \alpha \in \Phi_0$

$\Rightarrow \exists \alpha_i \in \Pi$, s.t. $\alpha_i = w\alpha \in \Phi_0$

$\Rightarrow \pm \alpha_i \in \Phi_0$, 于是 $e_i, f_i \in \Phi_0$

由 $[e_i, f_i] = h_i \ne 0$ 与 $I^2 = 0$ 矛盾.

故 $\Phi_0 = \emptyset$, $I \subseteq H$

$I \ne 0 \Rightarrow \exists x \in I$, $h_i \in H$, s.t. $\langle x, h_i \rangle \ne 0$

又 $[x, e_i] = \alpha_i(x) e_i = \frac{1}{d_i} \langle h_i, x \rangle e_i \in I$

$\Rightarrow e_i \in I$ 矛

简化: (1) L 非半单 $\Leftrightarrow L$ 有特征交换子理想

(2) I 权空间分解 $\Rightarrow I = (I \cap H) \oplus \sum_{\alpha \in \Phi_0} L(A)_{\alpha}$, $\Phi_0 \subseteq \Phi$

由 I 特征性 $\Rightarrow w\Phi_0 = \Phi_0 \Rightarrow e_i, f_i \in I$ 且 $[e_i, f_i] \ne 0$

$\Rightarrow \Phi_0 = \emptyset$, 即 $I \subseteq H$

(3) $I \cap H \ne 0 \Rightarrow \exists h_i \in H$, s.t. $\langle h_i, I \cap H \rangle \ne 0$

$\Rightarrow e_i \in I$ 矛

③. H 为 $L(A)$ 的 cartan 子代数.

pf: H 交换 $\Rightarrow H$ 幂零, 只须证 $N(H) = H$

$\forall x = h_x + \sum_{\alpha} x_{\alpha} \in L \setminus H$, 其中 $x_{\alpha} \in L_{\alpha}$ 且不全为 0.

不妨设 $x_{\beta} \ne 0$, $\beta \ne 0 \Rightarrow \exists h \in H$ s.t. $\beta(h) \ne 0$.

$\Rightarrow [xh] = \beta(h) e_\beta + \sum_{\alpha\neq\beta} \alpha(h) e_\alpha \notin H.$

$\Rightarrow x \notin N(H)$

④. $L(A)$ 的 cartan 矩阵为 A，继而 $L(A)$ 为单 Lie 代数.

pf: 至此，已经得到：$L(A) = H \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} L(A)_\alpha$ 为 cartan 分解，

Φ 为 cartan 分解下根系，$\{h_i\}$ 为 H-组基.

由 $\Pi = \{\alpha_i\}$ $\Rightarrow$ $|\Pi| = \dim H$，

又 $\Phi^+ = \Omega^+ \cup \Omega^-$ 被 Π 非负 or 非正线性表示 $\Rightarrow$ Π 为 Φ 的一个单根系.

$S_i(h_j) = h_j - A_{ji} h_i$

$\alpha_j(S_i^{-1} h_k)$

$\Rightarrow (S_i\alpha_j)(h_k) = \alpha_j(S_i h_k)$

$= \alpha_j(h_k - A_{ki} h_i)$

$= A_{kj} - A_{ki} \cdot A_{ij} = (\alpha_j - A_{ij}\alpha_i)(h_k)$

$\Rightarrow S_i\alpha_j = \alpha_j - A_{ij}\alpha_i$

$\Rightarrow L(A)$ 的 cartan 阵为 A.

⑤. 由此，得到 Lie 代数分类定理，即 $\mathbb{C}$ 上，非平凡单 Lie 代数有

无限系：A_l，$l\geq 1$；B_l，$l\geq 2$；C_l，$l\geq 3$；D_l；$l\geq 4$

有限系：E_6，E_7，E_8，F_4，G_2

其中任二个 Lie 代数不同构

6. 关于结构常数.

① 总可以选取一组 $\{e_\alpha \mid \alpha\in\Phi\}$，s.t. $N_{\alpha,\beta} = \pm(p+1)$，（$p$ 由 β 上 α 链来导出）

pf: 令 $e_i' = -f_i$，$h_i' = -h_i$，$f_i' = -e_i$.

则 e_i'，h_i'，f_i' 满足 $L(A) = L/J$ 定义中的性质，

$\Rightarrow \exists$ Lie 同态 $\theta: L(A) \to L(A)$，

s.t. $\theta(e_i) = e_i'$，$\theta(f_i) = f_i'$，$\theta(h_i) = h_i'$

又 $\theta^2 = 1$ $\Rightarrow$ $\theta \in \mathrm{Aut}\, L(A)$

设 $L(A)$ 上，e_{Φ^+} 已取定，e_{Φ^-} 相应选取使 $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$

此时, $\forall \alpha\in\Phi^+$, $[h, \theta e_\alpha] = \theta^{-1}[\theta h, e_\alpha] = \theta[-h, e_\alpha) = -\alpha(h)\theta e_\alpha$

$\Rightarrow \theta e_\alpha = \lambda_\alpha e_{-\alpha}$, $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$.

由 $e_\alpha \neq 0 \Rightarrow \lambda_\alpha \neq 0$

令 $\mu_\alpha^2 = -\lambda_\alpha^{-1}$, 则 $\theta \mu_\alpha e_\alpha = -\mu_\alpha^{-1} e_{-\alpha}$

且有 $[\mu_\alpha e_\alpha, \mu_\alpha^{-1} e_{-\alpha}] = [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$

取 $\sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$ 上另一组基 $\{e_\alpha' = \mu_\alpha e_\alpha, e_{-\alpha}' = \mu_\alpha^{-1} e_{-\alpha} \mid \alpha\in\Phi^+\}$,

则 $[e_\alpha', e_\beta'] = N_{\alpha,\beta}' e_{\alpha+\beta}'$ 且 $e_{-\alpha}' = \theta e_\alpha'$

$\Rightarrow [e_{-\alpha}', e_{-\beta}'] = [-\theta e_\alpha', -\theta e_\beta']$

$= \theta[e_\alpha', e_\beta']$

$= -N_{\alpha,\beta}' e_{-\alpha-\beta}'$

又 $[e_{-\alpha}', e_{-\beta}'] = N_{-\alpha,-\beta}' e_{-\alpha-\beta}' \Rightarrow N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$

由 $N_{\alpha,\beta}\cdot N_{-\alpha,-\beta} = -(p+1)^2 \Rightarrow N_{\alpha,\beta} = \pm(p+1)$

note1: Lie代数中, H的两组特殊基 $\{h_\alpha\}$ 和 $\{h_\alpha'\}$ 由Killing型确定,
但 $\sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$ 部分可任取, 即有自由性
若保持 $\{N_{\alpha\beta}\}$ 性质, 则 e_{Φ^+} 可任取, e_{Φ^-} 再由之确定.

note2: 自同构 θ 建立了 $L_\alpha \to L_{-\alpha}$ 映射,
即建立了 e_{Φ^+} 与 e_{Φ^-} 联系
继而通过调整 e_{Φ^+} s.t. $k_{\alpha,\beta} = \frac{N_{\alpha,\beta}}{N_{-\alpha,-\beta}}$ 可控制为任一常数 k_0

推论: $\exists$ $\sum_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$ 上一组基 s.t. $k_{\alpha,\beta} \equiv 1$, 即 $N_{\alpha,\beta} = N_{-\alpha,-\beta} = \pm i(p+1)$

Q: 一般地, 可否使右式符号也确定下来.

关于 $N_{\alpha\beta}$: ① e_Π 下 $\{N_{\alpha,\beta}\}$ 与 $\Phi^+\setminus\Pi$ 相互确定, 两边均可任取

② $k_{\alpha,\beta} = \frac{N_{\alpha,\beta}}{N_{-\alpha,-\beta}}$, $\Rightarrow$ 可使 $k_{\alpha,\beta} \equiv k_0 \neq 0$, k_0 任意.

③. k_0 取定下, $N_{\alpha\beta}$ 相差一个符号不确定.

且按上述构造方法, e_α 也相差一个符号不确定.

但考虑到①, 对每一确定 $\{N_{\alpha,\beta}\}$, Φ^+ 有 e_Π 种取法.

即还不止书中方法.

Q: 一般地, w 为 H 上自同构, s.t. $w\Phi=\Phi$

令 $K^{w}_{\alpha,\beta}=\frac{N_{\alpha,\beta}}{N_{w\alpha,w\beta}}$, 可否也令 $K^{w}_{\alpha,\beta}$ 恒为任一非零常数