Cpt8. 单 Lie 代数分类定理

0. Cartan 阵 内积与 Killing 型.

设 V 以 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{l}$ 为基.

作内积, s.t. $\dfrac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = A_{ij}$

$\Rightarrow$ 内积与 Killing 型 相差一个常数.

但不影响理论推导.

Cpt8.1 A_l 型 单 Lie 代数.

1. 内积构造.

①. 令 $\tilde{V}$ 由 $\{\beta_i\}_{i=1}^{l+1}$ 生成, 且以 $\{\beta_i\}$ 为标准正交基.

令 $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i+1}$, $i=1,\cdots,l$

$\Rightarrow \{\alpha_i\}$ 线性无关

令 V 为以 $\{\alpha_i\}$ 为基生成的 $\tilde{V}$ 子空间. 继承 $\tilde{V}$ 上内积

②. 验证性质.

易证

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \begin{cases} 2, & j=i \\ -1, & j=i\pm1 \\ 0 & |j-i|>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = \begin{cases} 2, & i=j \\ -1, & j=i\pm1 \\ 0, & |j-i|>1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(\dfrac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\right) = (A_{ij}) = A$

2. 构造 Weyl 群.

①. 令 $S_i: \tilde{V}\to\tilde{V}$,

$\beta_i \mapsto \beta_{i+1}$ $\hookrightarrow$ 即 S_i 交换 β_i, β_{i+1}

$\beta_{i+1} \mapsto \beta_i$

$\beta_j \mapsto \beta_j,\ j\neq i, i+1$

$\Rightarrow S_i(\alpha_i) = S_i(\beta_i - \beta_{i+1}) = \beta_{i+1} - \beta_i = -\alpha_i$

$S_i(\alpha_{i+1}) = S_i(\beta_{i+1} - \beta_{i+2}) = \beta_i - \beta_{i+2} = \alpha_{i+1} + \alpha_i$

$S_i(\alpha_{i-1}) = S_i(\beta_{i-1} - \beta_i) = \beta_{i-1} - \beta_{i+1} = \alpha_{i-1} + \alpha_i$

$S_i(\alpha_j) = S_i(\beta_j - \beta_{j+1}) = \beta_j - \beta_{j+1} = \alpha_j,\ |j-i|>1$

综上，$S_i\alpha_j = \alpha_j - A_{ij}\alpha_i$

$\Rightarrow S_i$ 作成 V 上单反射.

(2). 令 W 为 $\{S_i|_V\}$ 生成群，$\Rightarrow$ W作成 weyl 群

注意到 S_i 置换了 β_i, β_{i+1}，且其它根不动

$\Rightarrow \{S_i\}$ 在 $\tilde{V}$ 上生成置换群 S_{l+1}

$\Rightarrow$ W 与 S_{l+1} 商群

且 $\{\beta_i\}$ 的每一置换必使得 $\{\alpha_i\}$ 改变

$\Rightarrow W \cong S_{l+1}$

note：反射群理论中，W在 V上作用，且不动点仅 0，

$\Rightarrow \dim W = \dim V$.

此时，$w\neq 1 \Leftrightarrow w$ 使 V 一组基发生变化.

3. 导出根系.

①. 令 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^{l}$，$\Rightarrow \Phi = W\Pi = \{\beta_i - \beta_j \mid i\neq j\}$

$\Phi^+ = \{\beta_i - \beta_j \mid i<j\}$.

Pf：由 $S_k(\beta_i - \beta_j) \in \Phi$，$W = \langle\{S_k\}\rangle \Rightarrow W\Pi \subseteq \Phi$

$j>i$ 时，$\beta_i - \beta_j = \beta_i - \beta_{i+1} + \cdots + \beta_{j-1} - \beta_j$

$= \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$

$= S_{j-1}\cdot S_{j-2}\cdot\cdots\cdot S_{i+1}\alpha_i$

$\Rightarrow \beta_i - \beta_j \in W\Pi$，$\Phi$ 根或对 $\Rightarrow j<i$ 情形.

$\Rightarrow \Phi \subseteq \mathbb{N}\Pi$.

Φ^+ 为 Φ 中被 Π 非负线性表示的部分，由 Φ 之证.

②. 推论：$\dim L = l + |\Phi| = l(l+2)$

4、矩阵形式.

①. recall 第四章理论

(1) 令 $L = sl_{l+1}(\mathbb{C})$，H 由 L 上所有对角阵构成

$\Rightarrow L = H \oplus \sum_{i\neq j} \mathbb{C}E_{ij}$，其中 H 为 L 的 cartan 子代数.

(2) 令 E_{ii}^*：$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{l+1} \end{pmatrix} \to \lambda_i$，$i=1,\cdots,l+1$

$\alpha_{ij} = E_{ii}^* - E_{jj}^* \Rightarrow \Phi = \{\alpha_{ij} \mid i\neq j\}$ 作成 L 的根系.

(3) 令 $\alpha_i = \alpha_{i,i+1}$，$i=1,\cdots,l$，$\Pi=\{\alpha_i\}$

由 $|\Pi| = l$ 且 Φ 为 Π 非正/非负线性表示

$\Rightarrow \Pi$ 作成 Φ 的单根系.

note：此外，L 的单性第四章已经导出.

②. 由 Φ 导出 α_j 上 α_i 链，$-p\alpha_i+\alpha_j, \cdots, \alpha_j, \cdots, q\alpha_i+\alpha_j$.

易验证 $\Rightarrow \dfrac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = p-q = -q = A_{ij}$

$\Rightarrow L$ 的 cartan 阵为 A.

5、单根分解树.

单根 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \cdots \quad \alpha_l$

二根和 $\alpha_1+\alpha_2 \quad \alpha_2+\alpha_3 \quad \cdots \quad \alpha_{l-1}+\alpha_l$

最长根 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l$

即：每一正根均唯一分解为单根非负线性表示，而该表示均由分解树得到.

note: 且在相差伸缩下, 唯一诱导内积

于是, 确定根系后, 可通过与1中根系建立对应, 诱导内积

Cpt 2. D_l 型单 Lie 代数.

1. 反射群系统

① 内积

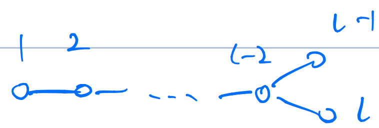
令 V 以 $\{\beta_i\}_{i=1}^{l}$ 为规范正交基, 作成内积空间

令 $\alpha_i=\beta_i-\beta_{i+1}$, $i=1,\cdots,l-1$

$\alpha_l=\beta_{l-1}+\beta_l$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle\alpha_i,\alpha_i\rangle=2, & \forall i \\ \langle\alpha_i,\alpha_{i+1}\rangle=-1, & \forall\ 1\le i\le l-2 \\ \langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=0, & 1\le i,j\le l-1,\ 且\ |i-j|>1 \\ \langle\alpha_{l-2},\alpha_l\rangle=-1 & \\ \langle\alpha_i,\alpha_l\rangle=0, & i\ne l-2,\ l \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\Pi=\{\alpha_i\}$ 生成 Cartan 阵为所求

note: 

中, 有连线 $\Leftrightarrow$ 内积为 $\frac{-1}{2}\cdot\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle=-1$

note 2: 注意到 $\beta_l\to-\beta_l$. $\Rightarrow$ α_{l-1} 与 α_l 互换.

② Weyl 群

(1) $1\le i\le l-1$ 时, 令 $s_i(\beta_i)=\beta_{i+1}$

$s_i(\beta_{i+1})=\beta_i$

$s_i(\beta_j)=\beta_j$, $j\ne i,i+1$

(2) $i=l$ 时, 令 $s_l(\beta_{l-1})=-\beta_l$

$s_l(\beta_l)=-\beta_{l-1}$

$s_l(\beta_j)=\beta_j$, $j\ne l-1,l$

note: 即 s_i 交换 β_i 与 β_{i+1}, $i\le l-1$

$s_l(\beta_{l-1},\beta_l)=(-\beta_l,-\beta_{l-1})$

(3) 令 W 由 $\{s_i\}$ 生成, 则 $W\cong S_l\ltimes \mathbb{Z}_2^{l-1}$

pf: $\{\beta_i\}$ 作成空间一组基 $\Rightarrow$ w 对 $\{\beta_i\}$ 作用唯一确定了 w.

由 s_i 性质 $\Rightarrow$ $\forall w\in W$, $w\beta_i=\pm\beta_{\sigma(i)}$, $\sigma\in S_l$

即 $w(\beta_1\cdots\beta_l)=(\varepsilon_1\beta_{\sigma(1)},\cdots,\varepsilon_l\beta_{\sigma(l)})$

其中 $\varepsilon_i=\pm1$, 由 s_i 特点 $\Rightarrow\prod\limits_i\varepsilon_i=1$. 即 $\{\varepsilon_i\}$ 中有偶数个 -1

$S_l=\langle\{s_1,\cdots,s_{l-1}\}\rangle$

$\Rightarrow\forall\sigma\in S_l$, $\exists w\in W$, s.t. $w(\beta_1\cdots\beta_l)=(\beta_{\sigma(1)}\cdots\beta_{\sigma(l)})$

又 $s_{l-1}\cdot s_l(\beta_1\cdots\beta_l)=(\beta_1\cdots\beta_{l-2},-\beta_{l-1},-\beta_l)$

$\Rightarrow W(\beta_1\cdots\beta_l)=\{(\varepsilon_1\beta_{\sigma(1)},\cdots,\varepsilon_l\beta_{\sigma(l)})\mid\prod\limits_i\varepsilon_i=1,\sigma\in S_l\}$

$\Rightarrow W\cong S_l\ltimes\mathbb{Z}_2^{l-1}$.

note: 这里用到群作用与半直积关系. (recall 魔方群理论)

(4) 令 $\Pi=\{\alpha_i\}_{i=1}^{l}$, $\Phi=W\Pi$

容易验证 $s_i\alpha_j=\alpha_j-A_{ij}\alpha_i$

$\Rightarrow$ s_i 为 α_i 对应的单反射

$\Rightarrow$ W 为根系 Φ 的 weyl 群

(5) 根系 $\Phi=\{\pm\beta_i\pm\beta_j\mid i\ne j\in\{1,\cdots,l\}\}$, $|\Phi|=2l(l-1)$

$\Phi^+=\{\beta_i-\beta_j,\beta_i+\beta_j\mid i<j\}$.

pf: $|\Phi^+|=\frac{1}{2}|\Phi|$ 且 Φ^+ 元素均为 Π 非负线性表示

$\Rightarrow$ 只须验证 Φ 为根系, 即 $W\Pi=\Phi$

易见 $W\Pi\subseteq\Phi$. 下证 $\Phi\subseteq W\Pi$

(1) $\forall\beta_i-\beta_j\in\Phi$. 不妨设 $i<j$ (负根成对, 只须讨论一侧)

$\Rightarrow s_{j-1}\cdot\cdots\cdot s_{i+1}(\beta_i-\beta_j)=\beta_{j-1}-\beta_j\in\Pi$

$\Rightarrow\beta_i-\beta_j\in W\Pi$

(2) $\forall\ \beta_i+\beta_j \in \Phi$，不妨设 $i<j$

$\Rightarrow s_{l-1} s_{l-2} \cdots s_{j+1}(\beta_i+\beta_j) = \beta_i+\beta_l$

$\Rightarrow s_{l-2} \cdots s_{i+1}(\beta_i+\beta_l) = \beta_{l-1}+\beta_l \in \Pi$

$\Rightarrow \beta_i+\beta_j \in W\Pi$

Φ 根成对 $\Rightarrow -\beta_i-\beta_j \in W\Pi$ #

2. 矩阵构造

① lemma：$M \in M_n(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 上 $n\times n$ 阶矩阵

$\Rightarrow$ 令 $L = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X^T M + MX = 0\}$

则 L 关于矩阵乘法作成 Lie 代数

Pf：即证封闭性，易见 L 对标量乘法和加法封闭.

$\Rightarrow L$ 为向量空间，只须证 L 对 Lie 括号封闭

设 $X_1^T M = -MX_1$，$X_2^T M = -MX_2$

$\Rightarrow [X_1,X_2]^T M = (X_1X_2 - X_2X_1)^T M$

$= X_2^T X_1^T M - X_1^T X_2^T M$

$= -X_2^T M X_1 + X_1^T M X_2$

$= M X_2 X_1 - M X_1 X_2$

$= -M[X_1,X_2]$ #

note：这里转置改共轭转置仍成立

Q：改共轭转置，所得 Lie 代数与原来是否同构？

②. lemma2：H 幂零，L 作为 H 模有权空间分解 $L = L_0 \oplus \sum_{\alpha\neq 0} L_\alpha$

则 $L_0 = H \Leftrightarrow H$ 为 L 的 Cartan 子代数 $(\dim L < \infty)$

Pf：$\Leftarrow$：由 Cartan 分解立见

$\Rightarrow$：即证 $N(H)=H$，先导出两条性质

(1). $e_\alpha \in L_\alpha \Rightarrow \forall h \in H,\ \exists n$ s.t. $(\mathrm{ad}\,h - \alpha(h))^n e_\alpha = 0$

$\Rightarrow (\mathrm{ad}\,h - \alpha(h))^n \mathrm{ad}\,h\, e_\alpha = \mathrm{ad}\,h\,(\mathrm{ad}\,h - \alpha(h)1)^n e_\alpha = 0$

$\Rightarrow [h\ e_\alpha] \in L_\alpha, \quad \forall h \in H$

(2) $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists h_0 \in H$, s.t. $\alpha(h_0) \neq 0$

$\Rightarrow (t-\alpha(h_0))^n$ 与 t 互素

$\Rightarrow \exists\ a(t), b(t) \in \mathbb{C}[t]$, s.t. $a(t)(t-\alpha(h_0))^n + b(t)\cdot t = 1$

$\Rightarrow e_\alpha = [a(\mathrm{ad}h_0)\cdot(\mathrm{ad}h_0 - \alpha(h_0)\cdot 1)^n + b(\mathrm{ad}h_0)\cdot \mathrm{ad}h_0] e_\alpha$

$= b(\mathrm{ad}h_0)\cdot \mathrm{ad}h_0\ e_\alpha$

$\Rightarrow 0 \neq [h_0\ e_\alpha] \in L_\alpha$

又 $H \cap L_\alpha = 0 \Rightarrow [h_0, e_\alpha] \notin H$

由 $L = H \oplus \sum_{\alpha\neq 0} L_\alpha$，设 $x = h_x + \sum_\alpha x_\alpha e_\alpha \in L \setminus H$

$\Rightarrow x_\alpha$ 不全为 0，不妨设 $x_\beta \neq 0$.

由(2)，设 $h \in H$ s.t. $[h\ e_\beta] \neq 0$

$[h, x] = \sum_{\alpha\neq 0} x_\alpha [h, e_\alpha] = x_\beta [h, e_\beta] + \sum_{\alpha\neq 0,\beta} x_\alpha [h, e_\alpha]$

由(1)，$[h, e_\beta]$ 不为 $\{[h, e_\alpha] \mid \alpha \neq 0, \beta\}$ 的线性组合

$\Rightarrow [h, x] \neq 0$,

$\Rightarrow N(H) = H$, H 为 L 的 cartan 子代数.

(2). 构造所求 Lie 代数

令 $M = \begin{pmatrix} & 1_l \\ 1_l & \end{pmatrix} \in M_{2l}(\mathbb{C})$,

$\Rightarrow L = \{ X \in M_{2l}(\mathbb{C}) \mid X^T M + M X = 0 \}$ 作成 Lie 代数

由 $X^T M + M X = 0$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in L$,

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{21}^T & x_{11}^T \\ x_{22}^T & x_{12}^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x_{11} = -x_{22}^T$, x_{21}, x_{12} 反对称

令 H 为 L 上对角阵全体,

$\Rightarrow$ ... λ_1

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_l & & \\ & & -\lambda_1 & \\ & & & \ddots \ -\lambda_l \end{pmatrix} \middle| \ \forall \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}$$

note: H 同构于某对角阵的左上部分.

③. 根系及 cartan 分解

简化矩阵的行号列号为 $1, \cdots, l, -1, \cdots, -l$.

由 X 分块性质 $\Rightarrow L = H \oplus \sum_\alpha \mathbb{C} e_\alpha$.

其中 $e_\alpha = \begin{cases} E_{ij} - E_{-j,-i} & \Rightarrow \text{对角分块} \\ -E_{-i,-j} + E_{ji} & \\ E_{i,-j} - E_{j,-i} & \rightarrow \text{右上分块} \\ -E_{-i,j} + E_{-j,i} & \rightarrow \text{左下分块} \end{cases}$

其中 $1 \le i < j \le l$

设 $h = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots \ \lambda_l & & \\ & & -\lambda_1 & \\ & & & \ddots \ -\lambda_l \end{pmatrix} \in H$,

$\Rightarrow [h, E_{ij} - E_{-j,-i}] = (\lambda_i - \lambda_j)(E_{ij} - E_{-j,-i})$

$[h, -E_{-i,-j} + E_{ji}] = (-\lambda_i + \lambda_j)(-E_{-i,-j} + E_{ji})$

$[h, E_{i,-j} - E_{j,-i}] = (\lambda_i + \lambda_j)(E_{i,-j} - E_{j,-i})$

$[h, -E_{-i,j} + E_{-j,i}] = (-\lambda_i - \lambda_j)(-E_{-i,j} + E_{-j,i})$

$\Rightarrow \Phi = \{\pm E_{ii}^* \pm E_{jj}^* \mid i \ne j\}$

再由 lemma2, $L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ 为 L 的 cartan 分解

note: $[h, E_{ij}] = hE_{ij} - E_{ij}h = \lambda_i E_{ij} - \lambda_j E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$

$[h, E_{-i,-j}] = (-\lambda_i + \lambda_j) E_{-i,-j}$

$[h, E_{i,-j}] = (\lambda_i + \lambda_j) E_{i,-j}$

$[h, E_{-i,j}] = (-\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$

④. L 半单性及 cartan 阵

(1) 令 $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \Rightarrow [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha$, 即 $\alpha(h_\alpha) = 2$

note: 计算思路

观察易见 $e_\alpha = e_{-\alpha}^T$,

由 $[E_{ij}\ E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}$

$\Rightarrow [E_{ij}\ E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}$

(其中,左乘 E_{ij} 使 A 第 j 行移至第 i 行,其他删去)

(2) lemma: $L = H \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{C}\cdot e_\alpha$ 且 $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$ s.t. $\alpha(h) \neq 0$,

则 L 为半单 Lie 代数.

Pf: L 非半单 $\Rightarrow \exists\ 0 \neq I \lhd L$ s.t. $I^2 = 0$.

I 作为 H 模有权空间分解 $I = (I\cap H) \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} (L_\alpha \cap I)$

若 $e_\alpha \in I \Rightarrow h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \in I$

$\Rightarrow [h_\alpha, e_{-\alpha}] = -\alpha(h) e_{-\alpha} \in I$

又 $\alpha(h) \neq 0 \Rightarrow e_{-\alpha} \in I$

$\Rightarrow [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha \neq 0$, 与 $I^2 = 0$ 矛.

故 $I \subseteq H$,

$I \neq 0$, $H^* = \langle \Phi \rangle \Rightarrow \exists \alpha \in \Phi$ s.t. $\alpha(I) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ 0 \neq h \in I$ s.t. $\alpha(h) \neq 0$

又 $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha \in I \Rightarrow e_\alpha \in I$, 矛

综上, L 为半单 Lie 代数.

由 lemma 立见 L 半单性

(3). 令 $\alpha_i = E_{ii}^* - E_{i+1,i+1}^*$, $i = 1, \cdots, l-1$ X

$\alpha_l = E_{ll}^* + E_{l+1,l+1}^*$

令 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^{l} \subseteq \Phi$.

由 Φ 为 Π 非正/非负线性表示 $\Rightarrow \Pi$ 为单根系.

由 Φ 中 α 链性质 $\Rightarrow \Pi$ 生成 cartan 阵即为所求.

note: 此外, $\Phi^+ = \{ E_{ii}^* \pm E_{jj}^* \mid i<j \}$

⑤. Φ^+ 的单根表示

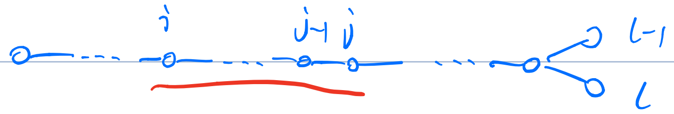
$$\beta_i-\beta_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1},\quad i<j$$

$$\beta_i+\beta_j=\alpha_i+\cdots+\alpha_{l-2}+\underline{\alpha_{l-1}+\alpha_l}+\alpha_{l-2}+\cdots+\alpha_j,\quad j\neq l$$

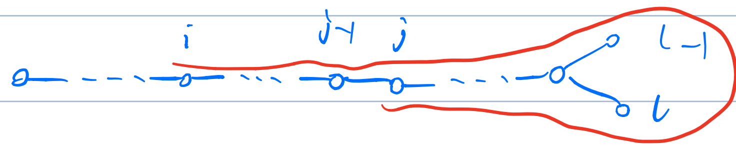
$$\beta_i+\beta_l=\alpha_i+\cdots+\alpha_{l-2}+\alpha_l$$

note：对应到 Dynkin 图上

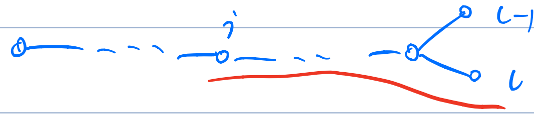
即 $\beta_i-\beta_j$：



$\beta_i+\beta_j$：



$\beta_i+\beta_l$：



Cpt 8.3. B_l 型单 Lie 代数

1. 反射群系统.

①. 内积与单根系

V 以 $\{\beta_i\}_{i=1}^l$ 为标准正交基

令 $\alpha_i=\beta_i-\beta_{i+1},\ i=1,\cdots,l-1$

$\alpha_l=\beta_l$

容易验证 $\{\alpha_i\}_{i=1}^l$ 写出的矩阵即为 B_l 的 cartan 阵

$\Rightarrow \Pi=\{\alpha_i\}_{i=1}^l$ 作成单根系

②. weyl 群与根系

(1) 令 $\left.\begin{array}{l} s_i(\beta_i,\beta_{i+1})=(\beta_{i+1},\beta_i), \\ s_i\beta_j=\beta_j,\ \forall j\neq i,i+1 \end{array}\right\}\ i=1,\cdots,l-1$

令 $\left.\begin{array}{l} s_l\beta_l=-\beta_l \\ s_l\beta_j=\beta_j,\ \forall j\neq l \end{array}\right\}\ i=l$

$\Rightarrow W=\langle\{s_i\}_{i=1}^l\rangle$ 为 Π 相应的 weyl 群

又变换群 $S_l = \langle \{s_i\}_{i=1}^{l-1} \rangle$，$S_l$ 可使任意位置反号

$\Rightarrow w(\beta_1 \cdots \beta_l) = (\varepsilon_1 \beta_{\sigma(1)}, \cdots, \varepsilon_l \beta_{\sigma(l)})$，$\varepsilon_i = \pm 1$，$\sigma \in S_l$

w 被右边唯一确定，而右边对 $\forall\ \varepsilon_i = \pm 1$，$\sigma \in S_l$ 可达

$\Rightarrow W \cong S_l \ltimes \mathbb{Z}_2^l$

(2) $\Phi = W\Pi = \{\pm\beta_i \pm \beta_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm \beta_i\}$

$\Phi^+ = \{\beta_i \pm \beta_j \mid i < j\} \cup \{\beta_i\}$

Pf：易见 $W\Phi = \Phi \Rightarrow W\Pi \subseteq W\Phi = \Phi$，只须证 $\Phi \subseteq W\Pi$

类似 $D_l \Rightarrow \{\pm\beta_i \pm \beta_j\} \subseteq W\Pi$

又 $\beta_i = s_i \cdots s_{l-1} \beta_l \in W\Pi$

$\Rightarrow \Phi \subseteq W\Pi$。#

(3) Φ^+ 的单根分解

$\beta_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_l$

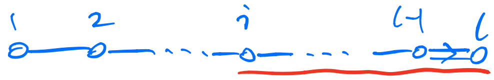
$\beta_i - \beta_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots \alpha_{j-1}$，$i < j$

$\beta_i + \beta_j = \beta_i - \beta_j + 2\beta_j$

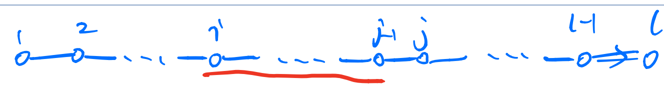
$= \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots \alpha_{j-1} + 2(\alpha_j + \alpha_{j+1} + \cdots + \alpha_l)$，$i < j$

note：Dynkin 图上的表现

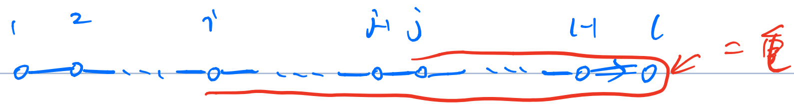
β_i：



$\beta_i - \beta_j$：



$\beta_i + \beta_j$：



2. 矩阵表达.

(1)、构造 Lie 代数

令 $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix} \in M_{2l+1}(\mathbb{C})$

$L = \{X \in M_{2l+1}(\mathbb{C}) \mid X^T M + M^T X = 0\}$

由 $X^T M + M X = 0$ 知 $X = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{20} & X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & l & l \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ l \\ l \end{matrix} \in L$

$\Leftrightarrow$ $X_{22} = -X_{11}^T$, X_{21}, X_{12} 反对称,

$X_{10} = -2X_{02}^T$, $X_{20} = -2X_{01}^T$, $X_{00} = 0$

②. Cartan 分解

(1) 令 H 由 L 的对角阵构成,

$\Rightarrow$ $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_l & & & \\ & & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\lambda_l \end{pmatrix} \middle| \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}$

方便起见, 行号标号为 $0, 1, \cdots, l, -1, \cdots, -l$.

(2) $L = H \oplus \sum_\alpha \mathbb{C} e_\alpha$ 其中

$$e_\alpha = \begin{cases} \left.\begin{array}{l} E_{ij} - E_{-j,-i} \\ -E_{-i,-j} + E_{ji} \\ E_{i,-j} - E_{j,-i} \\ -E_{-i,j} + E_{-j,i} \end{array}\right\} & 1 \le i \le j \le l \\ \left.\begin{array}{l} 2E_{i,0} - E_{0,-i} \\ -2E_{-i,0} + E_{0,i} \end{array}\right\} & 1 \le i \le l \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow [h, E_{ij} - E_{-j,-i}] = (\lambda_i - \lambda_j)(E_{ij} - E_{-j,-i}) \\ [h, -E_{-i,-j} + E_{ji}] = (\lambda_j - \lambda_i)(-E_{-i,-j} + E_{ji}) \\ [h, E_{i,-j} - E_{j,-i}] = (\lambda_i + \lambda_j)(E_{i,-j} - E_{j,-i}) \\ [h, -E_{-i,j} + E_{-j,i}] = (-\lambda_i - \lambda_j)(E_{i,-j} - E_{j,-i}) \end{array}\right\} i < j$$

$$[h, 2E_{i,0} - E_{0,-i}] = \lambda_i (2E_{i,0} - E_{0,-i})$$

$$[h, -2E_{-i,0} + E_{0,i}] = -\lambda_i (-2E_{-i,0} + E_{0,i})$$

$\Rightarrow$ $L = H \oplus \sum_\alpha \mathbb{C} e_\alpha$ 为 cartan 分解

$\Phi = \{ \pm E_{ii}^* \pm E_{jj}^* \mid i \ne j \} \cup \{ E_{ii}^* \}$ (整理时改用 λ_i)

由 Φ 上 α 链导出 cartan 阵, 且为 B_l 型

③. 同样地，令 $h_\alpha=[e_\alpha, e_{-\alpha}] \Rightarrow \alpha(h_\alpha)=2$ (check)

$\Rightarrow$ L 为半单 Lie 代数 #

Cpt 8.4. C_l 型单 Lie 代数.

1. 反射群系统

(1) 内积与单根子.

V 以 $\{\beta_i\}_{i=1}^{l}$ 为标准正交基作成内积空间.

令 $\alpha_i = \beta_i - \beta_{i+1},\quad i=1,\cdots,l-1$

$\alpha_l = 2\beta_l$

令 $\Pi=\{\alpha_i\}_{i=1}^{l}$，易验证 Π 生成 cartan 阵为 C_l 型

(2) weyl 群与根子

$\{s_i\}$ 同 B 型中定义 $\Rightarrow W=\langle\{s_i\}\rangle = S_l \ltimes \mathbb{Z}_2^{\,l}$

根子 $\Phi = W\Pi = \{\pm\beta_i\pm\beta_j \mid i\neq j\}\cup\{\pm 2\beta_i\}$

正根子 $\Phi^+ = \{\beta_i\pm\beta_j \mid i<j\}\cup\{2\beta_i\}$

note: 证明与 B_l 一致

(3) Φ^+ 上的单根分解

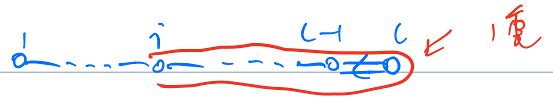
$2\beta_i = 2\alpha_i + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$

$\beta_i - \beta_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots \alpha_{j-1},\quad i<j$

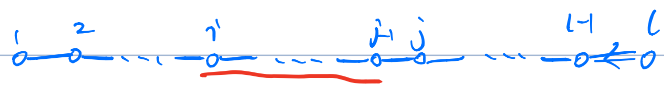
$\beta_i + \beta_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l,\quad i<j$

note: Dynkin 图上的表现

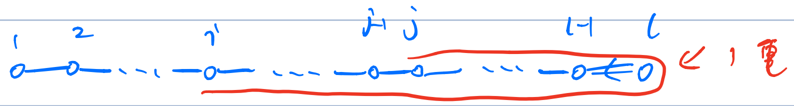
$2\beta_i$:



$\beta_i - \beta_j$:



$\beta_i + \beta_j$:



2. 矩阵表达

(1). 构造 Lie 代数及 Cartan 分解

(1) 令 $M=\begin{pmatrix}0 & 1_l\\ -1_l & 0\end{pmatrix}\in M_{2l}(\mathbb{C})$, $L=\{X\in M_{2l}(\mathbb{C})\mid X^TM+MX=0\}$

$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\in L \Leftrightarrow x_{22}=-x_{11}^T$, x_{12}, x_{21} 对称

(2) 令 H 为 L 对角阵 $\Rightarrow H=\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_l\end{pmatrix}\middle|\ \lambda_i\in\mathbb{C}\right\}$

令行号标号为 $1,\cdots,l,-1,\cdots,-l$,

$\Rightarrow L=H\oplus\sum_\alpha \mathbb{C}\cdot e_\alpha$. 其中

$$e_\alpha=\begin{cases} E_{ij}-E_{-j,-i} & \\ -E_{-i,-j}+E_{ji} & 1\le i\le j\le l\\ E_{i,-j}+E_{j,-i} & \\ E_{-i,j}+E_{-j,i} & \\ E_{i,-i} & 1\le i\le l\\ E_{-i,i} & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &[h,E_{ij}-E_{-j,-i}]=(\lambda_i-\lambda_j)(E_{ij}-E_{-j,-i})\\ &[h,-E_{-i,-j}+E_{ji}]=(\lambda_j-\lambda_i)(-E_{-i,-j}+E_{ji})\\ &[h,E_{i,-j}+E_{j,-i}]=(\lambda_i+\lambda_j)(E_{i,-j}-E_{j,-i})\\ &[h,-E_{-i,j}-E_{-j,i}]=(-\lambda_i-\lambda_j)(E_{i,-j}-E_{j,-i})\end{aligned}\right\}\ i<j$$

$[h,E_{i,-i}]=2\lambda_i E_{i,-i}$

$[h,E_{-i,i}]=-2\lambda_i E_{-i,i}$

$\Rightarrow L=H\oplus\sum_{\alpha\in\Phi}\mathbb{C}\cdot e_\alpha$ 为 Cartan 分解

$\Phi=\{\pm\lambda_i\pm\lambda_j\mid i\neq j\}\cup\{2\lambda_i\}$

且确定的 Cartan 阵即为 C_l 型.

(2). 同样地, 令 $h_\alpha=[e_\alpha,e_{-\alpha}]\Rightarrow\alpha(h_\alpha)=2$ (check)

$\Rightarrow L$ 为半单 Lie 代数.

至此，无限维的单Lie代数分类完毕。

A_l, B_l, C_l, D_l 族单Lie代数称为classical单Lie代数

E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 称为exceptional单Lie代数

note：A~D族的思路

(1) 标准线性空间 ⇒ 构造单根系，并验证cartan矩阵

⇒ 相应得到单反射 ⇒ 生成weyl群

⇒ 生成根系，且根系以单根分解

(2) 构造 M，令 $L=\{X \mid X^TM+MX=0\}$，H为L对角阵

⇒ $L = H \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{C}\cdot e_\alpha$ 为权空间分解

⇒ 且作成所需根系

⇒ L 即为所需矩阵表达。

E, F, G 族中，仅给出根系的空间表示

Cpt 8.5. G_2 单Lie代数

1. weyl群与根系

令 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 为 G_2 单根系

由 cartan阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ s_1(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}$$

$$s_2(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1 & \\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

note：$s_i(\alpha_j)=\alpha_j-\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\alpha_i = \alpha_j - A_{ij}\alpha_i$

$$\Rightarrow\ s_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)=(\alpha_1,\cdots\alpha_l)\cdot\begin{pmatrix}1 & & -A_{i1} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & -1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -A_{il} & & 1\end{pmatrix} \quad (*)$$

容易验证，$\Phi^+=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2,2\alpha_1+3\alpha_2\}$

$$\Phi = W\Pi = \Phi^+\cup(-\Phi^+)$$

2、二维根系

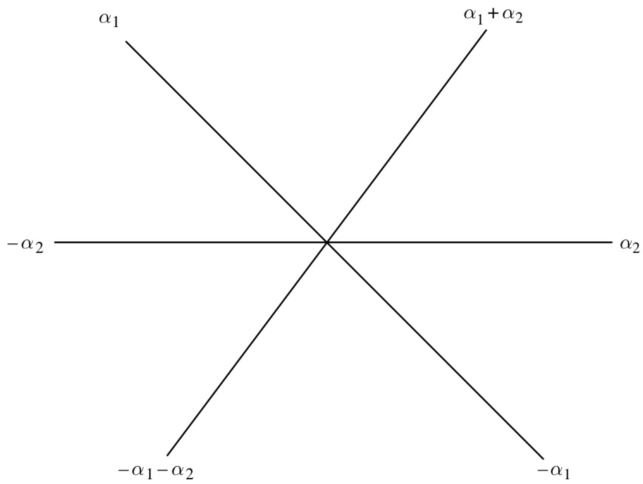


Figure 8.1 Simple root system of type A_2

A_2 型，

$W \cong D_6 \cong S_3$ 为3阶二面体群

共一条轨道

Dynkin图为 

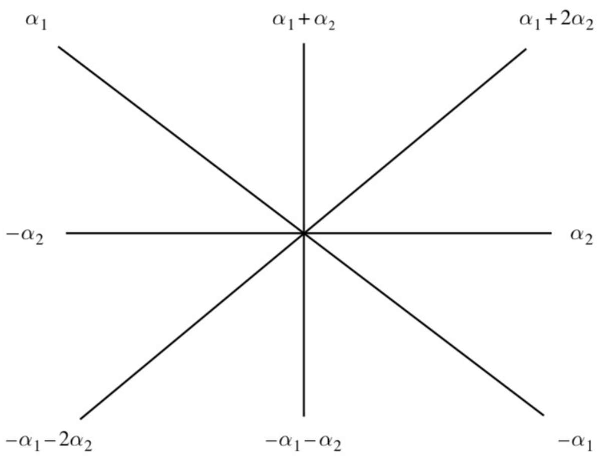


Figure 8.2 Simple root system of type B_2

B_2 型，

$W \cong D_8 \cong S_2 \ltimes Z_2^2$

为4阶二面体群

有2条轨道

Dynkin图为 

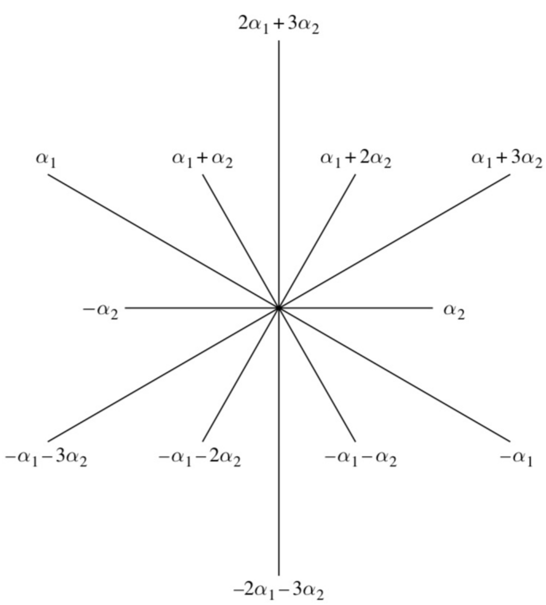


Figure 8.3 Simple root system of type G_2

G_2 型，

$W \cong D_{12}$ 为6阶二面体群

Dynkin图为 

共两条轨道.

Cpt 8.6. 单 Lie 代数 F_4

1、Weyl 群和单根系

(1)、令 V 以 $\{\beta_i\}_{i=1}^{4}$ 为规范正交基作成内积空间

令 $\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2, \\ \alpha_2 = \beta_2 - \beta_3 \\ \alpha_3 = \beta_3 \\ \alpha_4 = \frac{1}{2}(-\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4) \end{cases}$ $\Rightarrow \Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^{4}$ 生成 F_4 的 cartan 阵

即 Π 作成单根系

(2)、令

$$S_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \frac{1}{2}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $W = \langle \{S_i\}_{i=1}^{4} \rangle$ 作成相应 weyl 群

2、根系

(1) 令 $W_0 = \langle \{S_1, S_2, S_3\} \rangle$，$\Pi_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

注意到 Π_0 为 B_3 根系，且 W_0 对 β_4 作用平凡

$\Rightarrow W_0\Pi_0 = \{\pm\beta_i \pm \beta_j \mid 1 \le i \ne j \le 3\} \cup \{\pm\beta_i \mid 1 \le i \le 3\} \subseteq W\Pi$

(2) 由 $\alpha_4 = \frac{1}{2}(-\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4) \in \Pi$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\pm\beta_1 \pm \beta_2 \pm \beta_3 + \beta_4) \in W_0\Pi \subseteq W\Pi$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\pm\beta_1 \pm \beta_2 \pm \beta_3 \pm \beta_4) \in W\Pi$

由 $S_4(\beta_4) = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) \in W\Pi \Rightarrow \beta_4 \in W\Pi$

由 $S_4(-\beta_3 + \beta_4) = \beta_1 + \beta_2 \in W\Pi \Rightarrow -\beta_3 + \beta_4 \in W\Pi$

综上，令 Φ 由 $\begin{cases} \pm\beta_i & 1\le i\le 4 \\ \pm\beta_i\pm\beta_j & ,1\le i\ne j\le 4 \\ \frac{1}{2}(\pm\beta_1\pm\beta_2\pm\beta_3\pm\beta_4) & \end{cases}$ 构成 $\Rightarrow \Phi\subseteq W\Pi$

下证 $\Phi = W\Pi$

Pf：只须证 $W\Phi\subseteq\Phi$，由 $W=\langle\{S_1,S_2,S_3,S_4\}\rangle$

只须对 S_1,S_2,S_3,S_4 逐证，且 S_1,S_2,S_3 从前面讨论中已见。

(1) 由

$$S_4(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\frac{1}{2}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S_4(\pm\beta_i)=\frac{1}{2}(\varepsilon_1\beta_1+\varepsilon_2\beta_2+\varepsilon_3\beta_3+\varepsilon_4\beta_4)\in\Phi$，且 $\varepsilon_i=1$

(2) 对右式矩阵任二列作和作差

观察可知所得到向量中恰有2个元素为2或-2，

有2个元素同为0

$\Rightarrow S_4(\pm\beta_i\pm\beta_j)=\pm\beta_k\pm\beta_l\in\Phi$

(3) 由(1)，$S_4(\pm\beta_i)$ 对应其中8种情形，

再由 $S_4^2=1\Rightarrow S_4(S_4(\pm\beta_i))=\pm\beta_i\in\Phi$，只须对余下8种讨论

Φ 根成对，$\Rightarrow$ 不妨设 β_4 系数为1

$S_4(\beta_1+\beta_2-\beta_3+\beta_4)=\beta_1+\beta_2-\beta_3+\beta_4\in\Phi$

$S_4(\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4)=\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4\in\Phi$

$S_4(-\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)=-\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4\in\Phi$

$S_4(-\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4)=S_4(\alpha_4)=-\alpha_4\in\Phi$. #

3、~~单根分解~~（可能有误）

①. $\beta_1-\beta_2$ $\quad\beta_2-\beta_3$ $\quad\beta_3$ $\quad\frac{1}{2}(-\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4)$ | 4

α_1 $\quad\alpha_2$ $\quad\alpha_3$ $\quad\alpha_4$

②. $\beta_1-\beta_3$ $\quad\beta_2$ $\quad\frac{1}{2}(-\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4)$ | 3

$\alpha_1+\alpha_2$ $\quad\alpha_2+\alpha_3$ $\quad\alpha_3+\alpha_4$

③ β_1 $\beta_2+\beta_3$ $\frac{1}{2}(-\beta_1+\beta_2-\beta_3+\beta_4)$ | 3

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ $\alpha_2+2\alpha_3$ $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

④. $\beta_1+\beta_3$ $\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4)$ $\frac{1}{2}(-\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)$ | 3

$\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ $\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$

⑤、 $\beta_1+\beta_2$ $\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4)$ $-\beta_1+\beta_4$ | 3

$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$ $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$ $\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4$

⑥ $\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2-\beta_3+\beta_4)$ $-\beta_2+\beta_4$ | 2

$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$ $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4$

⑦. $\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)$ $-\beta_3+\beta_4$ | 2

$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4$ $\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4$

⑧. β_4 ⑨ $\beta_3+\beta_4$ | 1+1

$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4$ $\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$

⑩. $\beta_2+\beta_4$ ⑪ $\beta_1+\beta_4$ | 1+1

$\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$ $2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$

综上：Φ^+ 由

$$\left\{\begin{array}{lll} \beta_i, & 1\le i\le 4 & 4个 \\ \beta_i+\beta_j, & 1\le i<j\le 4 & 6个 \\ \beta_i-\beta_j: & 1\le i<j\le 3 & 3个 \\ \beta_4-\beta_i: & 1\le i\le 3 & 3个 \\ \frac{1}{2}(\pm\beta_1\pm\beta_2\pm\beta_3+\beta_4) & & 8个 \end{array}\right.$$

构成

note：F_4 没有导出 weyl 群结构.

Cpt 8.7. 单 Lie 代数 E_6, E_7, E_8

仅须求出 E_8 根系，余下 2 个立得.

1、内积与单根系

令 V 以 $\{\beta_i\}_{i=1}^{8}$ 为规范正交基，作成内积空间.

注意到 E_8 的 Dynkin 图去掉第 8 点，即得 D_7.

这暗示了 E_8 根系的选取方式.

即，令 $\begin{cases} \alpha_i = \beta_i - \beta_{i+1}, & 1 \le i \le 6 \\ \alpha_7 = \beta_6 + \beta_7, \\ \alpha_8 = \frac{-1}{2} \sum_{i=1}^{8} \beta_i \end{cases}$ $\Rightarrow$ 与 D_7 一致

令 $\Pi = \{\alpha_i\}_{i=1}^{8}$，易验证 Π 生成 E_8 的 cartan 阵

2. weyl 群与根系

① $1 \le i \le 6$ 时，令 $S_i(\beta_i, \beta_{i+1}) = (\beta_{i+1}, \beta_i)$

$S_i(\beta_j) = \beta_j, \quad j \ne i, i+1$ 　与 D_7 一致

令 $S_7(\beta_6, \beta_7) = (\beta_6, \beta_7)\begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}$

$S_7(\beta_i) = \beta_i, \quad 1 \le i \le 5$

令 $S_8(\beta_i) = \beta_i - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8} \beta_i$

$\Rightarrow W = \langle \{S_i\}_{i=1}^{8} \rangle$ 作成 E_8 的 weyl 群

② 由 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{7}$ 作成 D_7 单根系

又 $S_i \beta_8 = \beta_8, \quad i = 1, \cdots, 7$

$\Rightarrow \pm\beta_i \pm \beta_j \in W\Pi, \quad 1 \le i \ne j \le 7$

再由 $\alpha_8 = \frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{8} \beta_i \Rightarrow \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i \beta_i) \in W\Pi, \quad \prod_i \varepsilon_i = 1$

③ 令 Φ 由 $\begin{cases} \pm\beta_i \pm \beta_j, & 1 \le i \ne j \le 8 \\ \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i \beta_i), & \varepsilon_i = \pm 1, \quad \prod_i \varepsilon_i = 1 \end{cases}$ 构成

断言 $\Phi = W\Pi$

Pf: 容易验证 $S_8(\beta_7 + \beta_8) \in \Phi \Rightarrow \Phi \subseteq W\Pi$

只须证 $W\Phi = \Phi$，同前述，仅须证 $S_8\Phi \subseteq \Phi$

由 $S_8(\beta_i - \beta_j) = \beta_i - \beta_j \in \Phi$

$S_8(\beta_i + \beta_j) = \beta_i + \beta_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \beta_i \in \Phi$

只须再验证 S_8 对 $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i \beta_i)$，$\varepsilon_i = \pm 1$，$\prod_i \varepsilon_i = 1$ 封闭

由 $\prod \varepsilon_i = 1$ 及负根成对性质，仅考虑 $(8,0)$, $(4,4)$, $(2,6)$

$(8,0) \Rightarrow \alpha_8$ ✓

$(2,6)$ 由 $S_8(\beta_i+\beta_j)$ 导出 ✓

$(4,4)$ 与 S_8 正交，✓ #

推论：$|\Phi| = 112 + 2^7 = 240$，

3、单 Lie 代数 E_7

① E_7 为 E_8 子结构 $\Rightarrow \Pi_0 = \{\alpha_i\}_{i=2}^{8}$，$W_0 = \langle \{S_i\}_{i=2}^{8} \rangle$

$\Rightarrow \Phi_0 = W_0 \cdot \Pi_0$

② Π_0 与 $\beta_1 - \beta_8$ 正交 $\Rightarrow$ W_0 对 $\beta_1 - \beta_8$ 作用平凡

Φ 中，与 $\beta_1 - \beta_8$ 正交的根有 $\begin{cases} \pm\beta_i \pm \beta_j, & 2 \le i \ne j \le 7 \\ \pm(\beta_1 + \beta_8) \\ \frac{1}{2}\sum_{i} \varepsilon_i \beta_i, & \varepsilon_i = \pm 1, \prod \varepsilon_i = 1 \text{ 且 } \varepsilon_1 = \varepsilon_8 \end{cases}$

$\Rightarrow \Phi_0$ 含于其中，下证 Φ_0 由上也这些根构成

pf: (1) D_6 为 E_7 Dynkin 图子图 $\Rightarrow \pm\beta_i \pm \beta_j \in \Phi_0$

(2) 由 $S_2, \cdots, S_7$ 对 β_1, β_8 作用平凡

而 $\alpha_8 = \frac{1}{2}\sum_i \beta_i \in \Pi_0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sum_i \varepsilon_i \beta_i \in \Phi_0$

(3) 再由 $S_8(\beta_1 + \beta_8) = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_8 - \sum_{i=2}^{6} \beta_i) \in \Phi_0$.

$\Rightarrow \pm(\beta_1 + \beta_8) \in \Phi_0$。 #

推论：$|\Phi_0| = 60 + 2 + 2^6 = 126$.

4、单 Lie 代数 E_6

①. E_6 为 E_7 子结构 $\Rightarrow \Pi' = \{\alpha_i\}_{i=3}^{8}$，$W' = \langle \{S_i\}_{i=3}^{8} \rangle$，$\Phi' = W'\Pi'$

由 Π' 与 $\beta_2 - \beta_8$ 正交 $\Rightarrow \Phi'$ 含于 $\begin{cases} \pm\beta_i \pm \beta_j, & 3 \le i \ne j \le 7 \\ \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i \beta_i), & \varepsilon_i = \pm 1, \prod \varepsilon_i = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_8. \end{cases}$ 中

下证 Φ' 由上也这些根构成

pf: (1) D_5 为 E_6 子图 $\Rightarrow \pm\beta_i \pm \beta_j \in \Phi'$

(2) S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_8$ 正交 ⇒ $\alpha_8 = \frac{1}{2}\sum \beta_i \in \Pi'$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum \varepsilon_i \beta_i \in \Phi'$，#

推论：$|\Phi'| = 40 + 2^5 = 72$.

note：E_6, E_7 亦可独立推导，待整理内容.

Cpt 8.8. 长根与短根性质.

①. 单 Lie 代数的根系 Φ 中，根长至多 2 种可能，

从夹角方面看，$\forall \alpha, \beta \in \Phi$，$\exists \gamma_0, \cdots, \gamma_n \in \Phi$

s.t. $\gamma_0 = \alpha$，$\gamma_n = \beta$，$\theta(\gamma_{i-1}, \gamma_i) \neq \frac{\pi}{2}$，$i = 1, \cdots, n$

pf：不妨设 $\theta(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}$，否则显然.

记 $X_1 = \{\gamma \in \Phi \mid \theta(\alpha, \gamma) \neq \frac{\pi}{2}\}$，

$Y_1 = \{\gamma \in \Phi \mid \theta(\beta, \gamma) \neq \frac{\pi}{2}\}$

若 $X_1 \cap Y_1 \neq \phi$，取 $\gamma_1 \in X_1$，$\gamma_2 \in Y_1$，$\gamma_3 = \beta$. 显然.

若 $X_1 \cap Y_1 = \phi$，令 $X_2 = \{\gamma \in \Phi \mid \exists \gamma_0 \in X_1,\ \theta(\gamma, \gamma_0) \neq \frac{\pi}{2}\}$

$Y_2 = \{\gamma \in \Phi \mid \exists \gamma_0 \in Y_1,\ \theta(\gamma, \gamma_0) \neq \frac{\pi}{2}\}$

类似地，若 $X_2 \cap Y_2 \neq \phi$，命题显然.

否则构造 X_3, Y_3，以此类推.

若总为空，由 $|\Phi| < \infty$，$\exists n$. s.t. $X_n \cap Y_n = \phi$，

且 $X_{n+1} = X_n$，$Y_{n+1} = Y_n$

$\Rightarrow \forall \alpha \in \Phi \setminus X_n$，$\alpha \perp X_n$，

$\Rightarrow \Phi$ 分为正交的两部分，与 L 单性矛盾.

note：$\forall \alpha \in \Phi$，同上构 $X_n \Rightarrow \exists n$，s.t. $X_n = \Phi \Rightarrow$ 命题得证.

Q：令 $X_1 = \{\gamma \in \Phi \mid \exists \Pi \subseteq \Phi,\ s.t.\ \alpha, \gamma \in \Pi\}$

$X_n = \{\gamma \in \Phi \mid \exists \Pi \subseteq \Phi,\ \gamma_0 \in X_{n-1},\ s.t.\ \gamma, \gamma_0 \in \Pi\}$

是否亦 $\exists n$，s.t. $X_n = \Phi$.

1. 根系之间的关系

recall: $\begin{cases} A_l \text{ 根系}, \{\beta_i-\beta_j \mid 1\le i\ne j\le l+1\} \\ D_l \text{ 根系 } \{\pm\beta_i\pm\beta_j \mid 1\le i\ne j\le l\} \end{cases}$

$\begin{cases} B_l \text{ 根系}, \{\pm\beta_i\pm\beta_j \mid 1\le i\ne j\le l\}\cup\{\pm\beta_i \mid 1\le i\le l\} \\ C_l \text{ 根系 } \{\pm\beta_i\pm\beta_j \mid 1\le i\ne j\le l\}\cup\{\pm 2\beta_i \mid 1\le i\le l\} \\ F_4 \text{ 根系 } \begin{cases} \pm\beta_i & 1\le i\le 4 \\ \pm\beta_i\pm\beta_j & ,1\le i\ne j\le 4 \\ \frac{1}{2}(\pm\beta_1\pm\beta_2\pm\beta_3\pm\beta_4) \end{cases} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ① B_l 中长根作成根系 D_l

短根作成根系 $(A_1)^l$

② C_l 中长根作成根系 $(A_1)^l$

短根作成根系 D_l

③ F_4 中，长/短根作成根系 D_4

④. G_2 中，长/短根作成根系 A_2

note: 具体关系可由上根的单根分解导出.

G_2 可观察图象得到，F_4 由对偶性得到.

2. 对偶系统

下设 Φ 的 Dynkin 图含二重边或三重边.

①、设 $\Pi=\{\alpha_i\}$ 为 Φ 根系

将 Dynkin 图反向，得到根系 $\Pi^\vee=\{\alpha_i^\vee\}$

$\Pi^\vee$ 生成根系 $\Phi^\vee$ 并作为其上单根系

具体地： Φ : B_l C_l F_4 G_2

$\Phi^\vee$: C_l B_l F_4 G_2

$\Phi^\vee$ 称为 Φ 的对偶根系

②. Π 生成 cartan 阵 $A=(A_{ij})$

$\Pi^\vee$ 生成 Cartan 阵 $A^\vee = (A_{ij}^\vee)$

由 Dynkin 图关系 $\Rightarrow A_{ij}^\vee = A_{ji} \Rightarrow A^\vee = A^T$

3、建立映射

①. 令 $\varphi: \mathbb{Z}\Pi^\vee \to \mathbb{Z}\Pi$

$$\alpha_i^\vee \longrightarrow \begin{cases} p\alpha_i, & 若\ \alpha_i\ 为短根 \\ \alpha_i & 若\ \alpha_i\ 为长根. \end{cases}$$

其中 p 为边重数，即 B_l, C_l, F_4 中，$p=2$，G_2 中 $p=3$.

note: ① 将 $\Pi^\vee$ 中短根映到 Π 中长根

将 $\Pi^\vee$ 中长根映为 Π 外更长根

②. $A_{ij}^\vee = \dfrac{2\langle\varphi(\alpha_i^\vee), \varphi(\alpha_j^\vee)\rangle}{\langle\varphi(\alpha_i^\vee), \varphi(\alpha_i^\vee)\rangle}$

pf:

由 $\dfrac{\varphi(\alpha_i^\vee)}{\varphi(\alpha_j^\vee)} = \dfrac{\alpha_i^\vee}{\alpha_j^\vee}$ 及 $\theta(\varphi(\alpha_i^\vee), \varphi(\alpha_j^\vee)) = \theta(\alpha_i, \alpha_j) = \theta(\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee)$ #

note: 即 φ 保夹角关系 $\Rightarrow \varphi(\Pi^\vee)$ 作成单根系，与 $\Pi^\vee$ 同构.

③.
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\Pi^\vee & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}\Pi \\ {\scriptstyle s_i^\vee}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_i} \\ \mathbb{Z}\Pi^\vee & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}\Pi \end{array}$$
为交换图.

pf: $s_i^\vee$ 不改变长短根 $\Rightarrow s_i\varphi(\alpha_i^\vee) = \varphi s_i^\vee(\alpha_i)$

$\alpha_i^\vee$ 与 α_i 同向 $\Rightarrow s_i^\vee$ 对 $\alpha_i^\vee$ 方向改变与 s_i 对 α_i 改变一样

note: $\Pi \to \Pi^\vee$ 建立 Π 与 $\Pi^\vee$ 对应,

$\alpha_i \mapsto \alpha_i^\vee$

故在同一空间下理解，Π 与 $\Pi^\vee$ 方向不变.

$\varphi: \mathbb{Z}\Pi^\vee \to \mathbb{Z}\Pi$ 为空间沿各方向的拉伸.

于是，可建立 W 与 $W^\vee$ 的自然同构.

note: φ 为同构 $\Rightarrow$ 交换图块得 $s_i^\vee$ 与 s_i 相对 $\mathbb{Z}\Pi^\vee, \mathbb{Z}\Pi$

可视为同一个. 又 $\mathbb{Z}\Pi^\vee, \mathbb{Z}\Pi$ 上作用唯一确定 $s_i^\vee, s_i$

$\Rightarrow W$ 与 $W^\vee$ 可自然视为一个

(4). $\forall \alpha^\vee \in \Phi^\vee$, $\exists!\ \alpha \in \Phi$, s.t. $\varphi(\alpha^\vee) = \begin{cases} p\alpha, & \alpha \text{ 为短根} \\ \alpha & \alpha \text{ 为长根} \end{cases}$

pf: $\varphi(\alpha^\vee) = \varphi(w\alpha_i^\vee) = w\varphi(\alpha_i) = \begin{cases} p\cdot w\alpha_i, & \alpha \text{ 为短根} \\ w\alpha_i & \alpha \text{ 为长根.} \end{cases}$

至此，由 $\Pi \leftrightarrow \Pi^\vee$ 关系，得到 $\Phi \leftrightarrow \Phi^\vee$ 关系，

并称 $\alpha^\vee$ 为 α 的对偶根

note: $\alpha^\vee$ 为长根 $\Leftrightarrow$ α 为短根

4. 性质

①. $\forall\ \alpha = \sum_i n_i\alpha_i \in \Phi$, α 为长根 $\Leftrightarrow$ $p \mid n_i$, $\forall\ \alpha_i$ 为短根

pf: α 为长根

$\Rightarrow \alpha = \alpha^\vee = \sum_{\alpha_i \text{长}} n_i\alpha_i^\vee + \sum_{\alpha_i \text{短}} n_i p^{-1}\alpha_i^\vee \in \mathbb{Z}\Pi^\vee$

$\Rightarrow p \mid n_i$, $\forall \alpha_i$ 为短根

反之，设 α 为短根 且 $p \mid n_i$, $\forall \alpha_i$ 为短根

$\Rightarrow \alpha^\vee = p\alpha = p\left(\sum_{\alpha_i \text{长}} n_i\alpha_i + \sum_{\alpha_i \text{短}} n_i\alpha_i\right)$

$= p\left(\sum_{\alpha_i \text{长}} n_i\alpha_i^\vee + \sum_{\alpha_i \text{短}} n_i p^{-1}\alpha_i^\vee\right)$

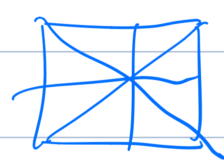
$\Rightarrow \alpha^\vee \in p\mathbb{Z}\cdot\Pi$ ↯

②. 令 Φ_s, Φ_l 分别为 Φ 上短根集与长根集，

Π_s, Π_l 分别为 Π 上短根集与长根集

则 $\mathbb{Z}\Phi_s = \mathbb{Z}\Pi$, $\mathbb{Z}\Phi_l = \mathbb{Z}\Pi_l + p\mathbb{Z}\Pi_s$

note: 2次象根系可作. 略. B_2 为例



$\Phi_s \rightarrow$ 小圈

$\Phi_l \rightarrow$ 大圈