Cpt 9、泛结构.

Cpt 9.1. 泛包络代数.

设 L 为 $\mathbb{C}$ 上 Lie 代数.

1. 构造 $\mathcal{U}(L)$

① 令 $T^0 = \mathbb{C}\cdot 1$，$T^1 = L$，$T^2 = L \otimes_{\mathbb{C}} L$，...

$\Rightarrow \dim T^n = (\dim T)^n$

② 令 $T = T(L) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n$ 称为 L 的张量代数

定义双线性映射：$T^n \times T^m \longrightarrow T^{m+n}$ ，即拼接运算

$(x, y) \longmapsto x \otimes y$

由 T 定义知，T 由 $\{T^n\}$ 生成

$\Rightarrow$ 拼接运算诱导 T 上乘法，使 T 成为 $\mathbb{C}$上含幺结合代数

即 $T \times T \rightarrow T$

$(x, y) \mapsto x \otimes y$

note：此时，$T:(\mathbb{C}, +, \otimes)$，且幺元为 T^0 中 1.

③. 令 J 为 $\{[xy] - (x\otimes y - y \otimes x) \mid \forall x, y \in L\}$ 生成的 T 子代数

$\Rightarrow \mathcal{U}(L) = T/J$ 称为 L 的泛包络代数

note：$[xy] \in T^1$，$x\otimes y, y \otimes x \in T^2 \Rightarrow J$ 由 T^1, T^2 中元素生成

形式上，J 实现了 $\mathcal{U}(L)$ 上的乘法交换运算

即 $x \otimes y = y \otimes x + [xy]$，其中 $[xy]$ 比 $y\otimes x$ 低阶

J 为理想 $\Rightarrow \mathcal{U}(L)$ 上任意位置可用上述方式实行交换

2. 例：令 L 为 n 维交换 Lie 代数

$\Rightarrow J$ 由 $\{x\otimes y - y \otimes x\}$ 生成

$\Rightarrow \mathcal{U}(L)$ 上乘法交换，此时 $\mathcal{U}(L)$ 为含幺交换代数.

且 $\mathcal{U}(L) \cong \mathbb{C}[x_1, \cdots x_n]$

3、表示性质

① 由 $L \xrightarrow{\sim} T' \hookrightarrow T \to T/J = \mathcal{U}(L)$

$\Rightarrow$ 以上映射复合得 $\sigma: L \to \mathcal{U}(L)$

② 设 A 为含幺结合代数, $\forall\ \theta: L \to [A]$ 为 Lie 同态,

$\exists!\ \varphi: \mathcal{U}(L) \to A$ 为代数同态, s.t. $\varphi\sigma = \theta$

Pf: 设 $\{x_i\}$ 为 $T' = L$ 一组基

$\Rightarrow \{x_{i_1}\cdots x_{i_r} \mid x_i \in L\} \cup \{1\}$ 为 T 一组基.

令 $\theta': T \to A$, $\theta'(1) = 1$

$x_{i_1}\cdots x_{i_r} \mapsto \theta(x_{i_1})\cdots\theta(x_{i_r})$

由 θ 线性性, 易见 θ' 为代数同态

且
$$\begin{tikzcd} & A \\ L \arrow[r] \arrow[ur, "\theta"] & T \arrow[u, dashed, "\theta'"'] \end{tikzcd}$$
为交换图.

由 $\theta'([xy] - (x\otimes y - y\otimes x))$

$= \theta([xy]) - (\theta(x)\cdot\theta(y) - \theta(y)\cdot\theta(x))$ (θ 为 Lie 同态)

$= 0$

$\Rightarrow J \subseteq \operatorname{Ker}\theta'$

$\Rightarrow (T/J)/(\operatorname{Ker}\theta'/J) \cong T/\operatorname{Ker}\theta' \cong \theta'(T) = \theta(T)$

$\Rightarrow A$ 为 $\mathcal{U}(L)$ 商模, 即有 $\varphi: \mathcal{U}(L) \to A$

且
$$\begin{tikzcd} & A \\ T \arrow[r] \arrow[ur, "\theta'"] & \mathcal{U}(L) \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$
为交换图

$\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} & & A & \\ L \arrow[r] \arrow[urr, "\theta"] \arrow[rrr, bend right, "\sigma"'] & T \arrow[rr] \arrow[ur, dashed, "\theta'"] & & \mathcal{U}(L) \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$
为交换图, φ 为所求, 存在性之证.

又 T 由 $L \cup \{1\}$ 代数生成 $\Rightarrow \mathcal{U}(L)$ 由 $\sigma(L) \cup \{1\}$ 生成

$\Rightarrow \varphi$ 由 $\sigma(L)$ 唯一确定.

唯一性得证.

note:

$$\begin{tikzcd} & A & \\ L \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\sigma"'] & T \arrow[u, dashed, "\theta'"] \arrow[r] & \mathcal{U}(L) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 存在性.

φ 由 $\sigma(L)$ 确定 $\Rightarrow$ 唯一性

③. 设 A 为结合代数, $\varphi: \mathcal{U}(L) \to A$ 为代数同态.

$\Rightarrow \exists!\ \theta: L \to [A]$ 为Lie同态, s.t. $\varphi\circ\sigma = \theta$

pf: 唯一性显然, 只须验证 $\theta = \varphi\circ\sigma$ 为Lie同态.

$\theta(x)\cdot\theta(y) - \theta(y)\cdot\theta(x)$

↲ φ 代数同态

$= \varphi(\sigma(x)\cdot\sigma(y) - \sigma(y)\cdot\sigma(x))$

↲ σ 定义

$= \varphi(\overline{x\otimes y} - \overline{y\otimes x})$

↲ $J=0$, 模代表元.

$= \varphi(\overline{[xy]})$

$= \varphi(\sigma([xy])) = \theta([xy])$ #

note: 本章中, 结合代数间的同态均理解为保么同态.

④. 推论: A 为结合代数, 则代数同态 $\mathcal{U}(L) \to A$

与Lie同态 $L \to [A]$ 有一一关系

亦即: A 为 L-Lie模 $\Leftrightarrow$ A 为 $\mathcal{U}(L)$ 代数模.

note: 这一对应是自然的.

一方面 L 生成 T $\Rightarrow$ $\sigma(L)$ 生成 $\mathcal{U}(L)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}(L)$ 上代数同态由 L 决定.

另一方面 $\sigma: L \to \mathcal{U}(L)$ s.t. $\mathcal{U}(L)$ 确定了 L 上Lie同态

Cpt 9.2. Poincaré-Birkhoff-Witt 定理.

1. PBW定理.

设 L 以 $\{x_i \mid i\in I\}$ 为基, 定义 I 上全序 $<$.

σ 同上节定义, 令 $y_i = \sigma(x_i)$

则 $\{y_{i_1}^{r_1}\cdots y_{i_n}^{r_n} \mid i_1<\cdots<i_n\}$ 作成 $\mathcal{U}(L)$ 一组基. ($n=0$ 代表1)

note: 上述集合与 $\{y_{i_1}\cdots y_{i_n} \mid i_1\le i_2\le\cdots\le i_n\}$ 相等.

pf: ①. 先证 $X=\{y_{i_1}\cdots y_{i_n} \mid i_1\le\cdots\le i_n\}$ 张成 $\mathcal{U}(L)$

T 以 $\{x_{j_1}\cdots x_{j_m}\}$ 为基

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}(L)$ 由 $\{y_{j_1}\cdots y_{j_m}\}$ 生成，只须证 $y_{j_1}\cdots y_{j_m}$ 可被 X 表示，

对 m 和 $(j_1,\cdots,j_m)$ 的反序数归纳.

$m=0,1$ 时，$y_{j_1}\cdots y_{j_m}\in X$

$m>1$ 时，若 $j_1\le\cdots\le j_m$，则 $y_{j_1}\cdots y_{j_m}\in X$.

否则，$\exists\ 1\le k<m$, s.t. $j_k>j_{k+1}$

又 $y_{j_k}\cdot y_{j_{k+1}} = y_{j_{k+1}}\cdot y_{j_k} + [y_{j_k}, y_{j_{k+1}}]$

$$\Rightarrow y_{j_1}\cdots y_{j_k}\cdot y_{j_{k+1}}\cdots y_{j_m} = \underbrace{y_{j_1}\cdots y_{j_{k+1}} y_{j_k}\cdots y_{j_m}}_{\text{反序数}-1} + \underbrace{y_{j_1}\cdots y_{j_{k-1}}[y_{j_k}, y_{j_{k+1}}]y_{j_{k+2}}\cdots y_{j_m}}_{\text{生成元数减少}}$$

由归纳法 $\Rightarrow y_{j_1}\cdots y_{j_m}\in X$.

②. 再证 $y_{i_1}\cdots y_{i_m}$ 线性无关

lemma: 令 $R=\mathbb{C}[z_i \mid i\in I]$ 为非交换多项式构成的 $\mathbb{C}$ 上代数.

$\exists$ 线性映射 $\theta: T\to R$, s.t.

$$\begin{cases} \theta(x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n}) = z_{i_1}\cdots z_{i_n}, & i_1\le\cdots\le i_n \\ \theta(x_{i_1}\otimes\cdots\otimes(x_{i_k}\otimes x_{i_{k+1}} - x_{i_{k+1}}\otimes x_{i_k} - [x_{i_k}, x_{i_{k+1}}])\otimes\cdots\otimes x_{i_n}) = 0. \end{cases}$$

由引理，$J\subseteq \ker\theta$

$\Rightarrow$ θ 诱导同态 $\theta': \mathcal{U}(L)=T/J\to R$

又 $\because$ $\theta(y_{i_1}\cdots y_{i_n}) = \theta'(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) = z_{i_1}\cdots z_{i_n}$ 在 $\mathbb{C}$ 上线性无关

$\Rightarrow \{y_{i_1}\cdots y_{i_n}\}$ 线性无关.

note: Lemma 证明较为繁琐，此处略过.

2. 推论：$\sigma: L\to[\mathcal{U}(L)]$ 为单 Lie 同态

pf: 由 $\sigma(x_i)=y_i$ 线性无关 $\Rightarrow \ker\sigma=0$.

又 $\sigma([x_1,x_2]) = \sigma'(x_1\otimes x_2 - x_2\otimes x_1)$ $\to T^2$ 上 $\sigma': T\to\mathcal{U}(L)$ 代数同态.

L 视为 T' $= \sigma(x_1)\cdot\sigma(x_2) - \sigma(x_2)\cdot\sigma(x_1)$

$= [G(x_1), G(x_2)]$

$\Rightarrow$ G 为 Lie 同态.

note: 于是 $L \hookrightarrow U(L)$, L 同构为 U(L) 子空间上诱导的 Lie 代数

3. U(L) 关于乘法无零因子.

Pf: 由 PBW 基定理, 取定 L 基的全序 $<$.

$\forall$ a, b 为 U(L) 上非零元,

有 $a = \sum_\alpha \lambda_\alpha y_{i_1}^{r_1} \cdots y_{i_n}^{r_n}$, $\alpha = (i_1, \cdots, i_n, r_1, \cdots, r_n)$

$b = \sum_\alpha \mu_\alpha y_{i_1}^{r_1} \cdots y_{i_n}^{r_n}$,

$\{\lambda_\alpha\}$, $\{\mu_\alpha\}$ 均不全为 0,

考虑 a 中阶次 $r_1 + \cdots + r_n$ 最大的项,

并依字典序 $(r_1 \cdots r_n)$ 取最大的一个 $\lambda_\beta \cdot y_{i_1}^{s_1} \cdots y_{i_n}^{s_n}$

同理, 取 b 中的 $\mu_\gamma \cdot y_{i_1}^{t_1} \cdots y_{i_n}^{t_n}$

由PBW基定理 $\Rightarrow y_{i_1}^{s_1} \cdots y_{i_n}^{s_n} \cdot y_{i_1}^{t_1} \cdots y_{i_n}^{t_n} \neq 0$,

且不被 a, b 余下项生成

$\Rightarrow$ a·b 中, $y_{i_1}^{s_1+t_1} \cdots y_{i_n}^{s_n+t_n}$ 的项系数为 $\lambda_\beta \cdot \mu_\gamma \neq 0$.

故 $a \cdot b \neq 0$ 即 U(L) 无零因子.

note: 简记 $\lambda_{i_1 \cdots i_r}$ 为 λ_α, $\alpha = (i_1 \cdots i_r)$

Q: 本节还差上面 lemma 未证, 视需要再补充.

Cpt. 9.3. 自由 Lie 代数.

1. 自由结构.

① X 为不空元集, F(X) 为 X 上自由结合代数.

note. F(X) 为非交换多项式, 以空字 Λ 为幺元.

② 令 FL(X) 为 Lie 代数 [F(X)] 中, X 生成的 Lie 子代数.

note: [F(X)] 与 F(X) 在集合层面相同.

代数结构上，$F(X)$ 以 X 为代数基，而 $[F(X)]$ 不是.

(向量空间) 模结构上，$F(X)$，$[F(X)]$ 均以 X 不定元列为模基.

2. 自由性与泛性质

① M 为以 X 为自由元的自由模，$i: X \hookrightarrow M$

$\Rightarrow \forall$ 模 N，及 $\theta: X \to N$，

$\exists ! \varphi: M \to N$，s.t. $\varphi \circ i = \theta$，$\Rightarrow$ 即

$$\begin{tikzcd} & N \\ X \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, hook, "i"'] & M \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

note: 具体地，φ 由 X 线性延拓得到

② $F(X)$ 为以 X 为自由元的自由结合代数，$i: X \hookrightarrow F(X)$

$\Rightarrow \forall$ 代数 A，及 $\theta: X \to A$，

$\exists ! \varphi: F(X) \to A$，s.t. $\varphi \circ i = \theta$. $\Rightarrow$ 即

$$\begin{tikzcd} & A \\ X \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, hook, "i"'] & F(X) \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

note: 具体地，$\varphi: F(X) \to A$

$$x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mapsto \theta(x_{i_1}) \cdots \theta(x_{i_r})$$

再由线性延拓 $\Rightarrow \varphi$ 保模 (加法+系数) 且保乘法.

③ $FL(X)$ 为以 X 为自由元的自由 Lie 代数，$i: X \hookrightarrow FL(X)$

$\Rightarrow \forall$ Lie 代数 L 及 $\theta: X \to L$ $\Rightarrow$ 即

$\exists ! \varphi: FL(X) \to L$，s.t. $\varphi \circ i = \theta$

$$\begin{tikzcd} & L \\ X \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, hook, "i"'] & FL(X) \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Pf: 由 $X \xrightarrow{\theta} L \xrightarrow{\sigma} \sigma(L) \subseteq \mathcal{U}(L)$ 及 ② $F(X)$ 泛性质

$\Rightarrow \exists ! \varphi': F(X) \to \mathcal{U}(L)$ 为代数同态

$$x \mapsto \sigma(\theta(x))$$

$\Rightarrow \varphi': [F(X)] \to [\mathcal{U}(L)]$

又 $\varphi'(x) = \sigma(\theta(x)) \in \sigma(L)$，且 $\sigma(L) \leq [\mathcal{U}(L)]$

X 生成 $FL(X)$

$\Rightarrow \varphi'(FL(X)) \subseteq \sigma(L)$

令 $\varphi = \sigma^{-1} \circ \varphi' \Rightarrow \varphi \circ i(x) = \sigma^{-1} \circ \varphi'(x) = \sigma^{-1}(\sigma(\theta(x))) = \theta(x)$

存在性得证.

又 X 生成 $FL(X) \Rightarrow$ 唯一性得证.

note: 证明中 G^{-1} 间接用到 PBW 定理

3. $F(X)$ 为自由代数，其作为向量空间以 X 所有排列作成一组基。

$FL(X)$ 为自由 Lie 代数，其向量空间的基应该怎么给出。

① 令 $[X]=\{ad_{x_{i_1}}\cdots ad_{x_{i_{r-1}}}x_r \mid x_{i_k}\in X\}$

$\Rightarrow FL(X)$ 由 $[X]$ 在模上生成

Pf: 由 Lie 括号线性性，只须生成"单项式"

(即书写形式只包含 Lie 括号而不含加号的元素)

由 ad 性质: $ad_{[xy]}=adx\cdot ady-ady\cdot adx$

总不妨设单项式形如 $ad_{x_1}\cdots ad_{x_{r-1}}\cdot x_r$

否则单项式 $Y=ad_{Y_1}Y_2$，Y_1,Y_2 为单项式且 Y_1 次数 ≥ 2

设 $Y_1=[Y_{11},Y_{12}]\Rightarrow Y=ad_{Y_1}Y_2$

$$=ad_{[Y_{11},Y_{12}]}Y_2$$

$$=adY_{11}\cdot adY_{12}Y_2-adY_{12}\cdot adY_{11}\cdot Y_2$$

最后二式中，Y_{11}、Y_{12} 次数均小于 Y_1，归纳即证。

② $F(X)$ 上，$x\in X$，$y\in F(X)$，则 $[xy]=0 \Leftrightarrow y=f(x)$

Pf: 只须证 $\Rightarrow$:

归纳法，若 y 次数 ≤ 1，显然成立。

若 y 次数 >1，设 $y=\sum_i y_i+c$，y_i 为单项式，且次数 ≥ 1

$0=[xy]=xy-yx=x\sum_i y_i-\sum_i y_i x$

$\Rightarrow x\cdot\sum_i y_i=\sum_i y_i x$ ↓比较右侧 x 次数

$\Rightarrow y_i=y_i'\cdot x$

$\Rightarrow x\cdot\sum_i y_i'\cdot x=\sum_i y_i'\cdot x^2$ ↓ $F(X)$ 无零因子

$\Rightarrow x\cdot\sum_i y_i'=\sum_i y_i'\cdot x$

归纳即证。

相关阅读: Hall sets (Marshall Hall, 1950)

4. FL(X) 上泛包络

① 已知 $\forall$ 代数 A,

$$\begin{tikzcd} & {[A]} \\ L \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{U}(L) \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

，即 Lie 态 θ 唯一确定代数同态 φ.

若 $\exists\, \sigma': L \to \mathcal{U}'(L)$ 亦使该性质成立.

则

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma'"] \arrow[ddr, "\sigma"'] & \mathcal{U}(L) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathcal{U}'(L) \arrow[d, "\varphi'"] \\ & \mathcal{U}(L) \end{tikzcd}$$

为交换图.

由唯一性 $\Rightarrow \varphi' \circ \varphi = 1_{\mathcal{U}(L)}$

同理得 $\varphi \circ \varphi' = 1_{\mathcal{U}'(L)}$

$\Rightarrow \mathcal{U}(L) \cong \mathcal{U}'(L)$

即 $\mathcal{U}(L)$ 在同构意义下唯一.

②、$\sigma: FL(X) \hookrightarrow F(X)$，s.t. $\forall \theta: FL(X) \to [A]$,

$\exists!\, \varphi: F(X) \to A$，s.t. $\varphi \circ \sigma = \theta$.

即

$$\begin{tikzcd} & {[A]} \\ FL(X) \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, hook, "\sigma"] & F(X) \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

pf: 由 $F(X)$ 泛性质, $\theta|_X: X \to A$

$\Rightarrow \exists!\, \varphi: F(X) \to A$ s.t. $\varphi|_X = \theta|_X$

$\Rightarrow \varphi: [F(X)] \to [A]$ 为 Lie 同态

$\Rightarrow \varphi|_{FL(X)}: FL(X) \to [A]$

且 $\varphi|_X = \theta|_X$, 由 $FL(X)$ 泛性质

$\Rightarrow \varphi|_{FL(X)} = \theta$，$\varphi$ 即为所求.

又 $\theta|_X$ 唯一确定 $\varphi: F(X) \to A$，唯一性得证.

推论: $\mathcal{U}(FL(X)) \cong F(X)$.

note: 类似①证明, 自由性 $\Rightarrow$ 泛性质, 反之, 亦有泛性质 $\Rightarrow$ 自由性.

Cpt 9.4. 由生成元和关系定义 Lie 代数.

1. 设 $X=\{x_i \mid i\in I\}$.

由 X 中元素乘法得到的元素 ⇒ 称为 Lie 单项式

Lie 单项式的线性组合 ⇒ 称为 Lie word.

2. 设 $R=\{w_j \mid j\in J\}$. w_j 为 X 上 Lie word.

令 $L(X;R)=FL(X)/\{R\}$, 其中 $\{R\}$ 为 R 在 $FL(X)$ 中的生成理想

并称 $L(X;R)$ 为 X 在关系 R 下生成的 Lie 代数.

3. $R'\subseteq R$ 为 X 上 Lie word 集

⇒ $L(X;R)$ 为 $L(X;R')$ 商代数

4. 例: 第七章中定义的 $L(A)$, $\tilde{L}(A)$

---

note: 关于泛包络 $U(L)$ 的一点理解.

①. $L \hookrightarrow U(L)$ 为 $[U(L)]$ 子代数

⇒ 任意 Lie 代数可视为代数的子代数.

②. 若 L 为 $[A]$ 的 Lie 子代数,

令 A_L 为 L 在 A 上生成的子代数.

⇒ A_L 为 $U(L)$ 商代数.

即. $U(L)$ 为以 L 为 Lie 子代数, 且由 L 生成的最大的一个.

Cpt 9.5 单李代数的图同构

recall:

① L 半单 ⇒ L 的 Cartan 子代数 H 在共轭意义下唯一

② H 取定 ⇒ Φ 取定,

⇒ Π 在 W 共轭意义下唯一

⇒ h_Π 在 θ_Φ 自同构意义下唯一

③ h_Π 取定 ⇒ e_Π, f_Π 在相差常数倍意义下唯一.

1. 图同构

① 下设 L 单, σ 为 L 上自同构 且 s.t. $\sigma h_\Pi = h_\Pi$, $\sigma e_\Pi = e_\Pi$

即 $\sigma h_i = h_{\sigma(i)}$, $\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$ 且 s.t. $A_{ij} = A_{\sigma(i)\sigma(j)}$

② 令 R 由 (1): $[h_i, h_j]$ 生成

(2) $[h_i, e_j] - A_{ij} e_j$

(3) $[h_i, f_j] + A_{ij} e_j$

(4)-(5) $[e_i f_j] - \delta_{ij} h_i$

(6) $\underbrace{[e_i [e_i \cdots [e_i}_{1-A_{ij}\text{个}} e_j] \cdots]]$, $i \neq j$

(7) $\overbrace{[f_i [f_i \cdots [f_i}^{} f_j] \cdots]]$, $i \neq j$

$X = \{e_i, f_i, h_i\}_{i=1}^{l}$.

则 $L \cong L(A) = L(X:R)$,

由 $\sigma R = R$ 知, σ 诱导 L 上自同构, 并称为 L 的图同构

③ 本节目的在研究 $L(A)^\sigma = \{x \in L(A) \mid \sigma(x) = x\} \leq L(A)$

2. σ 正交性和新道性质.

① σ 保 A_{ij} ⇔ σ 保 Dynkin 图.

于是 可从 Dynkin 图 款 知, σ 的可能取值.

仅 在 A, D, E 系中, σ 可取非平凡变换

具体地，分为这几类：A_{2k}, A_{2k+1}, D_4, D_l $(l\ge 5)$, E_6

此时，$\alpha_i=\alpha_i^\vee$, $h_i=h_i'$

②. σ 诱导 H 上自同构，即 $\sigma(h_i)=h_{\sigma(i)}$，且 σ 为正交变换

自然地，σ 诱导 H^* 上自同构，且 $\sigma(\alpha_i)=\alpha_{\sigma(i)}$

Note: 若 $\langle\sigma(x),\sigma(y)\rangle=\langle x,y\rangle$,

伸缩内积后，仍有 $\langle\sigma(x),\sigma(y)\rangle'=\langle x,y\rangle'$

另：$A_{ij}=2\frac{|\alpha_j|}{|\alpha_i|}\cos(\alpha_i,\alpha_j)$

$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=|\alpha_i|\cdot|\alpha_j|\cdot\cos(\alpha_i,\alpha_j)$

$\Rightarrow\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\frac{1}{2}|\alpha_i|^2\cdot A_{ij}$

显然.

对 ADE 线而言，$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=A_{ij}$，故 σ 为正交变换

③ 令 $V=H_{\mathbb{R}}^*$, $V'=\{v\in V\mid\sigma(v)=v\}$

对 σ 作用在 $\{1,\dots,l\}$ 上的轨道 J,

令 $\alpha_J=\frac{1}{|J|}\sum_{j\in J}\alpha_j$，则 $\sigma(\alpha_J)=\alpha_J$，且 $(\alpha_J-\alpha_j)\perp V'$, $\forall j\in J$

Pf: $\forall v\in V'$, $\langle v,\alpha_J-\alpha_j\rangle=\langle\sigma(v),\sigma(\alpha_J)-\sigma(\alpha_j)\rangle$

$=\frac{1}{|J|}\cdot\sum_{j\in J}\langle v,\alpha_J-\alpha_j\rangle=0$

推论：α_J 为 α_j 在 V' 上投影，$\forall j\in J$

于是 $V'=\mathrm{span}\{\alpha_J\mid J\text{ 为 }\sigma\text{ 轨道}\}$

即：轨道上向量平均值，恰为所有向量的投影.

④. 观察 A_{2k}, A_{2k-1}, D_4, D_l $(l\ge 5)$, E_6 上，σ 的可能定义，

轨道 J 仅有下面几种可能

(1). $|J|=1$，平凡作用

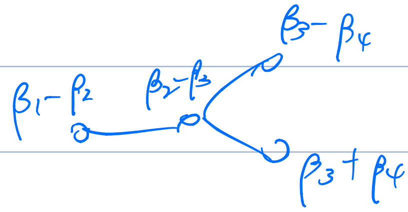
(2) $|J|=2$, $J=\{j,j'\}$ 置换作用 且 $\alpha_j+\alpha_{j'}\notin\Phi$

(3) $|J|=3$, $J=\{j,j',j''\}$ 循环置换

$\sigma(j)=j'$, $\sigma(j')=j''$, $\sigma(j'')=j$

且 $\alpha_j+\alpha_{j'}$, $\alpha_{j'}+\alpha_{j''}$, $\alpha_{j''}+\alpha_j\notin\Phi$

Note: 此为 D_4 情形:



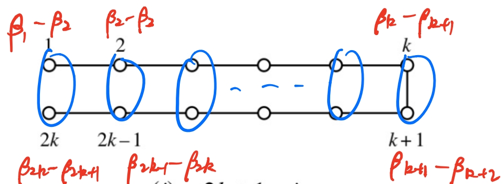
(4) $|J|=2$, $J=\{j,j'\}$ 且 $\alpha_j+\alpha_{j'}\in\Phi$

Note: A_{2k} 的 $k, k+1$; D_{k+1} 中的 $k, k+1$.

3. σ作用诱导的根系

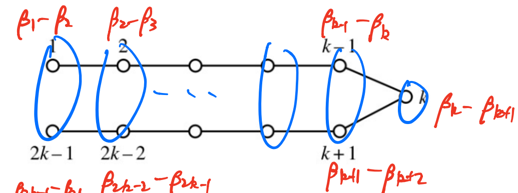
① 一轨

(1) Type A_{2k}



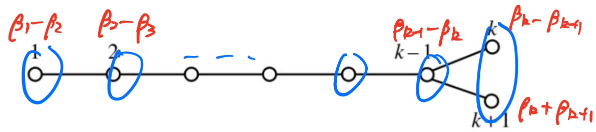
$\sigma(i)=2k+1-i$

(2) Type A_{2k-1}



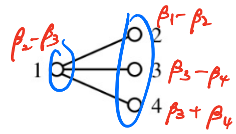
$\sigma(i)=2k-i$

(3) Type D_{k+1}



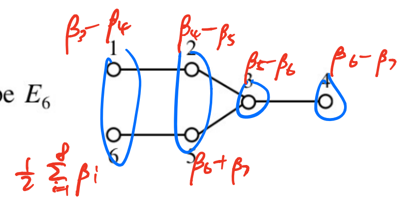
$\sigma(i)=i$ for $1\le i\le k-1$
$\sigma(k)=k+1$
$\sigma(k+1)=k$

(4) Type D_4



$\sigma(1)=1$ $\sigma(2)=3$ $\sigma(3)=4$ $\sigma(4)=2$

(5) Type E_6



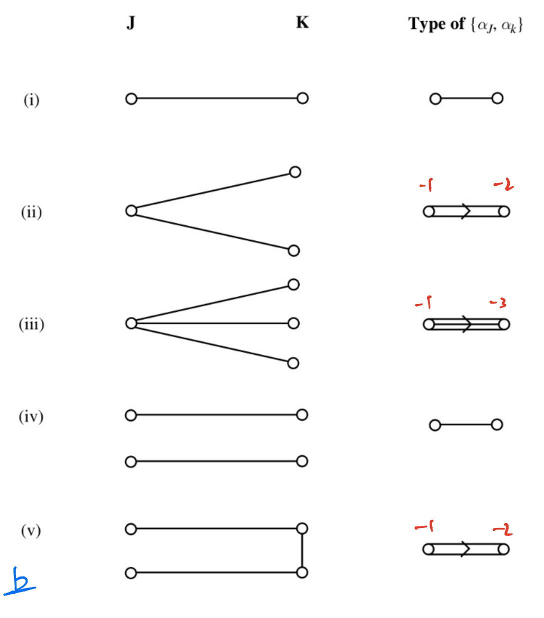
$\sigma(1)=6$ $\sigma(2)=5$ $\sigma(3)=3$ $\sigma(4)=4$ $\sigma(5)=2$ $\sigma(6)=1$

② 二轨:

对σ的2条轨道 J, K,

$\{\alpha_J, \alpha_K\}$ 作成二阶单根系

有且仅有右图几种可能



If no node in J is joined to any node in K then the type of $\{\alpha_j, \alpha_k\}$ is $A_1\times A_1$.

Note: 左侧是简单机械的验证

右侧将一轨的对应单根标上

进行了验证 (略)

③ 令 $\Pi' = \{\alpha_J \mid J$ 为 σ 轨道$\}$,

在上边给出的规范正交基下, $ws(\alpha_i, \alpha_j) = A_{ij}$

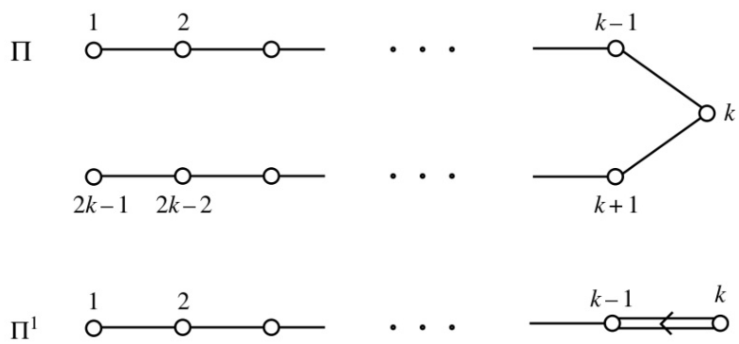
由此易得下边结果

Type Π	**Order of σ**	**Type Π^1**
A_{2k}	2	B_k
A_{2k-1}	2	C_k
D_{k+1}	2	B_k
D_4	3	G_2
E_6	2	F_4

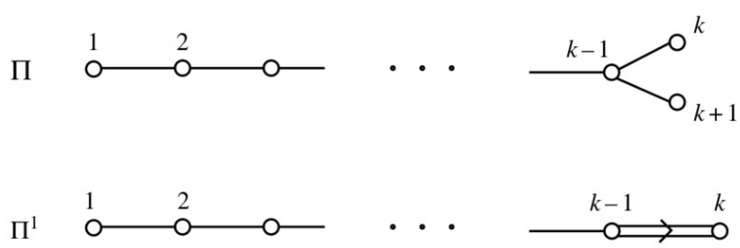
综上讨论, 有下边关系

(1) A_{2k}

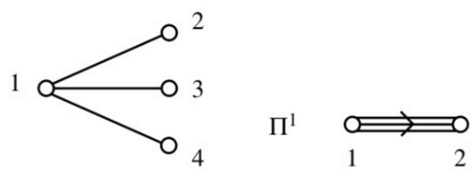
(2) A_{2k-1}



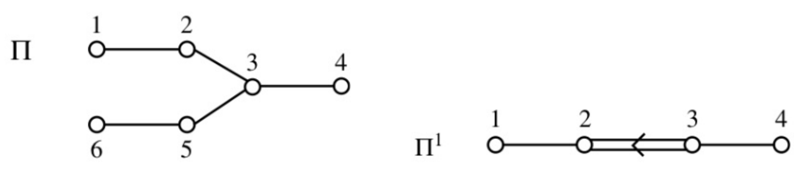
(3) D_{k+1}



(4) D_4



(5) E_6



令 W', Φ' 为 Π' 得到的根系,
则 (Φ', V', Π', W') 作成新的根系.

④. 令 I, J 为两条 σ 轨道, A' 为 Π' 的 Cartan 阵

则 $A'_{IJ} = \begin{cases} \sum_{i\in I} A_{ij}, & \text{若 } I \text{ 为 } A_1, A_1\times A_1 \text{ 或 } A_1\times A_1\times A_1 \\ 2\sum_{i\in I} A_{ij}, & \text{若 } I \text{ 为 } A_2 \end{cases}$ (仅在 A_{2k} 中)

pf: trivial, 从 = 轨道可见

4、令 $W^\sigma = \{ w\in W \mid w\sigma = \sigma w \text{ 作用 } V \text{ 上}\}$

则有同构 $f: W' \longrightarrow W^\sigma$

$s_J \longmapsto (w_0)_J$.

其中 $(w_0)_J$ 为 W 的抛物子群 W_J 的最长元.

思路: (1) 由 $\sigma s_i \sigma^{-1} = s_{\sigma(i)}$, 且由 Coxeter 关系,

知, σ 共轭保 $l(w)$

而 $l(w_0)$ 为 longest, $\therefore w_0^\sigma = w_0$, 即 $w_0 \in W^\sigma$

(2) 推导 $W^\sigma = \langle (w_0)_J \mid J \text{ 遍历轨道类} \rangle$

(3) $(w_0)_J|_{V'} = s_J$

由此, 得到群同态 $W^\sigma \to W'$, 再证单性即可. (P170)

5. $\forall \alpha\in\Phi$, 令 α' 为 α 在 V' 上投影, 则有

(1). α' 为 Φ' 中某一根的正倍数

(2) 定义 Φ 上等价关系, $\alpha\sim\beta$ iff α' 为 β' 的正倍数

则 $\Phi/\sim \;\leftrightarrows\; \{ w\Phi_J^+ \mid J \text{ 遍历}\sigma\text{轨道类}, w\in W^\sigma\}$

(3) $\Phi/\sim \;\leftrightarrows\; \Phi'$, 其中 $w\in W^\sigma$, $w' = w|_{V'}$

$w\Phi_J^+ \longmapsto w'\alpha_J$

Note: (2) 重要性质: $w\Phi_J^+ = \Phi_J^-$ $\Leftrightarrow$ $w = (w_0)_J$ (P171 - P172)

6. $L(A)^\sigma \leftrightarrows L(A')$

Note: 定义 e_J, f_J, h_J, check 生成 得同态 $L(A') \to L(A)^\sigma$

由 $L(A')$ 单性知 同态为单射.

最后比较维数, 得双射.

Note: 后几个证明略过.

图同构小结

1. 图同构

σ 保 $L(A)$ 的性质 且 可逆 $\Rightarrow$ σ 为图同构

2. P 限制 $H_{\mathbb{R}}^*$ 上

① σ 在 $H_{\mathbb{R}}^*$ 上作用为 $\sigma\alpha_i = \alpha_{\sigma(i)}$

② σ 在 $H_{\mathbb{R}}^*$ 上不变子空间 V' 以 $\alpha_J = \frac{1}{|J|}\sum_{j\in J}\alpha_j$ 为基.

$\Pi' = \{\alpha_J\}_{J\text{为}\sigma\text{轨}}$ 为原根子在 V' 上投影.

③ 单点 α_J 有 4 种情形

两点 $\{\alpha_J, \alpha_K\}$ 有 6 种情形

3. 单根子与 Cartan 阵

① Π' 结构由 $\{\alpha_J, \alpha_K\}$ 决定.

② Cartan 阵 $A' = (A'_{IJ})$ 由 $\{\alpha_J, \alpha_K\}$ 决定.

4. Weyl 群: $W^\sigma \cong W'$

$(w_0)_J \mapsto s_J$

5. 根子: $\Phi/\sim \;\cong \{w\alpha_J \mid J$ 跑轨道类, $w\in W^\sigma\}$

$\cong \Phi'$

6. $L(A') \cong L(A)^\sigma$.

新结论.

以上, $L(A)$ 上图自同构不变量 $L(A)^\sigma$ $\Leftarrow$ 根子 Φ'

$\Downarrow$ 限制 $H_{\mathbb{R}}^*$ 上看 $\Uparrow$

单根子 Π', Cartan 阵 A' 性质 $\Rightarrow$ 构建 Weyl 群 W'