Cpt 10. 半单 Lie 代数上的不可约模.

本章将确定半单 Lie 代数上的有限维不可约模.

Cpt 10.1. Verma 模.

1. 设 K 为 L 子代数, 则 $\exists!\ \theta: \mathcal{U}(K) \hookrightarrow \mathcal{U}(L)$

s.t. 右图交换

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\sigma_K"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{U}(K) \arrow[d, "\theta"] \\ L \arrow[r, "\sigma_L"] & \mathcal{U}(L) \end{tikzcd}$$

Pf: 由 $\sigma_L \circ i: K \to \mathcal{U}(L)$

$\Rightarrow \exists!\ \theta: \mathcal{U}(K) \to \mathcal{U}(L)$ s.t. 上图交换.

下证 θ 单射.

设 $\{x_i\}$ 为 K 一组基.

则 $\theta: \mathcal{U}(K) \to \mathcal{U}(L)$

$x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mapsto x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ (L上)

由 PBW 基定理, θ 将 $\mathcal{U}(K)$ 一组基映为 $\mathcal{U}(L)$ 一组线性无关元.

$\Rightarrow \theta$ 为单射. #

于是, $\mathcal{U}(K)$ 可以看成 $\mathcal{U}(L)$ 子代数.

2. 设 L 为有限维半单 Lie 代数.

(1). L 有 Cartan 分解 $L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$

于是三角分解 $L = N^- \oplus H \oplus N^+$

令 $B = H \oplus N$, 则 $N \lhd B \le L$, 且 $B/N \cong H$

Pf: 易见 $N \lhd B \le L$,

由 $N \cap H = 0$, $H \le B$

$\Rightarrow B/N = (H+N)/N \cong H/N \cap H \cong H$

(2). 令 $X = \{e_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+\} \cup \{h_i - \lambda(h_i)\}$

K_λ 为 X 生成的 $\mathcal{U}(L)$ 左理想.

$\Rightarrow M(\lambda) = \mathcal{U}(L)/K_\lambda$ 作成左 $\mathcal{U}(L)$ 模

并称 $M(\lambda)$ 为 λ 确定的 Verma 模.

note: K_χ 可视为 $U(L)$ 的上述集合生成的左子模.

note2: A 为 $U(L)$ 模 $\Leftrightarrow$ $\rho: U(L) \to A$

$\Leftrightarrow$ $\rho: L \to [A]$

$\Leftrightarrow$ A 为 L-lie 模.

③. 注意到 $\chi \subseteq B$. 令 K_χ' 为 χ 生成的 $U(B)$ 左理想.

note: K_χ' 亦可视为 $U(B)$ 左 $U(B)$-子模

亦或 $U(L)$ 的左 $U(B)$-子模.

记 $\Phi^+ = \{\beta_1 \cdots \beta_N\}$.

由 pbw 基定理: $\{h_1^{s_1} \cdots h_l^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N}\}$ 作成 $U(B)$ 基.

性质: (1) K_χ' 以 $(h_1 - \chi(h_1))^{s_1} \cdots (h_l - \chi(h_l))^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N}$ 为基,

其中 $s_i, t_i \geq 0$, 且 $\{s_i, t_i\}$ 不全为0.

(2) $\dim U(B)/K_\chi' = 1$,

pf: 1. 先证 $\{(h_1-\chi(h_1))^{s_1} \cdots (h_l - \chi(h_l))^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N} \mid \forall s_i, t_i \geq 0\}$

为 $U(B)$ 一组基, 即线性生成 + 无关性,

定义基上的偏序关系

$$h_1^{s_1} \cdots h_l^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N} < h_1^{s_1'} \cdots h_l^{s_l'} e_{\beta_1}^{t_1'} \cdots e_{\beta_N}^{t_N'}$$

iff $s_1 + \cdots + s_l + t_1 + \cdots + t_N < s_1' + \cdots + s_l' + t_1' + \cdots + t_N'$

则 $(h_1 - \chi(h_1))^{s_1} \cdots (h_l - \chi(h_l))^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N}$

$= h_1^{s_1} \cdots h_l^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N} +$ 若干严格小的基元线性组合.

且 $s_1 + \cdots + s_l + t_1 + \cdots + t_N = 0$ 时,

$$(h_1 - \chi(h_1))^{s_1} \cdots (h_l - \chi(h_l))^{s_l} e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N} = 1 = h_1^{s_1} \cdots h_l^{s_l} e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N}$$

由归纳法, $\{(h_1 - \chi(h_1))^{s_1} \cdots (h_l - \chi(h_l))^{s_l} e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N}\}$

与基 $\{h_1^{s_1} \cdots h_l^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N}\}$ 等价

2. 易见 $\{s_i, t_i\}$ 不全为0时, $(h_1 - \chi(h_1))^{s_1} \cdots (h_l - \chi(h_l))^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N} \in K_\chi'$

只须证 $1 \notin K_\chi'$, 即 $K_\chi' \neq U(B)$.

注意到 $\lambda: H \to \mathbb{C}$ 为 H 上一维表示.

而 $B/N \cong H \Rightarrow \lambda$ 诱导一维表示 $B \to \mathbb{C}$.

$h+n \mapsto \lambda(h)$

$\mathcal{U}(B)$ 泛性质

$\Rightarrow$ 得到 $\rho: \mathcal{U}(B) \to \mathbb{C}$

$$\begin{cases} e_{\beta_i} \mapsto 0 \\ h_i \longmapsto \lambda(h_i) \\ 1 \longmapsto 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow K_\lambda' \subseteq \operatorname{Ker} \rho$,

而 $1 \notin \operatorname{Ker} \rho \Rightarrow 1 \notin K_\lambda'$. #

3. $M(\lambda)$ 的一组基

① $K_\lambda \cap \mathcal{U}(N^-) = 0$. (这里视 $\mathcal{U}(N^-)$ 为 $\mathcal{U}(L)$ 子代数.)

pf: 由 $L = N^- \oplus B$ 及 pbw 基定理

$\Rightarrow \mathcal{U}(L) = \mathcal{U}(N^-) \cdot \mathcal{U}(B)$

$\Rightarrow K_\lambda = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathcal{U}(L) e_\alpha + \sum_{i=1}^{l} \mathcal{U}(L)(h_i - \lambda(h_i))$

$= \mathcal{U}(N^-) \cdot \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathcal{U}(B) \cdot e_\alpha + \sum_{i=1}^{l} \mathcal{U}(B)(h_i - \lambda(h_i))$

$= \mathcal{U}(N^-) \cdot K_\lambda'$

$\Rightarrow K_\lambda$ 由 $\{ f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} (h_1 - \lambda(h_1))^{s_1} \cdots (h_l - \lambda(h_l))^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N} \}$ 生成

其中 s_i, t_i 不全为零.

去掉 $\lambda(h_i)$ 部分

$\Rightarrow \forall\, 0 \neq x \in K_\lambda$, $x + \mathcal{U}(N^-) = \bar{x} + \mathcal{U}(N^-)$

其中 $\bar{x}$ 为 $\{ f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} h_1^{s_1} \cdots h_l^{s_l} \cdot e_{\beta_1}^{t_1} \cdots e_{\beta_N}^{t_N} \}$ 非零线性组合

且 s_i, t_i 不全为零.

$\overset{\text{pbw}}{\Rightarrow} \bar{x} \notin \mathcal{U}(N^-)$, 继而 $x \notin \mathcal{U}(N^-)$

$\Rightarrow K_\lambda \cap \mathcal{U}(N^-) = 0$.

note: x 不被 $\mathcal{U}(N^-)$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ x 添上 $\mathcal{U}(N^-)$ 线性组合后, 不能 $\mathcal{U}(N^-)$ 表示

②. 令 $m_\lambda = 1 + K_\lambda$, 则 $\{ f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} \cdot m_\lambda \}$ 作成 $M(\lambda)$ 一组基.

$f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} \cdot (1 + K_\lambda) \Rightarrow f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} + K_\lambda$ (商模意义下)

pf: $M(\lambda)=\mathcal{U}(L)/K_\lambda \Rightarrow M(\lambda)=\{u+K_\lambda \mid u\in \mathcal{U}(L)\}$
$=\{u\cdot m_\lambda \mid u\in \mathcal{U}(L)\}$

(1) 由 pbw 基定理，$f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N} h_1^{s_1}\cdots h_l^{s_l} e_{\beta_1}^{t_1}\cdots e_{\beta_N}^{t_N}$ 构成 $\mathcal{U}(L)$ 基

$\Rightarrow f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N} h_1^{s_1}\cdots h_l^{s_l} e_{\beta_1}^{t_1}\cdots e_{\beta_N}^{t_N}\cdot m_\lambda$ 生成 $M(\lambda)$

又 $\begin{cases} e_{\beta_i}\cdot m_\lambda = e_{\beta_i}\cdot(1+K_\lambda)=K_\lambda=0\cdot m_\lambda \\ h_i\, m_\lambda = h_i(1+K_\lambda)=h_i+K_\lambda=\lambda_i(h)\cdot(1+K_\lambda)=\lambda_i(h)\cdot m_\lambda \end{cases}$

$\Rightarrow f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N}\cdot m_\lambda$ 生成 $M(\lambda)$

(2) 又 $\sum_{r_1,\dots,r_N} k_{r_1,\dots,r_N} f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N} m_\lambda = m_\lambda$

$\Rightarrow \sum_{r_1,\dots,r_N} k_{r_1,\dots,r_N} f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N}\in K_\lambda$

$\Rightarrow \sum_{r_1,\dots,r_N} k_{r_1,\dots,r_N} f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N}\in K_\lambda\cap \mathcal{U}(N^-)=0$

$\overset{pbw}{\Longrightarrow} k_{r_1,\dots,r_N}=0.\quad \forall (r_1,\dots r_N)$

综上，$\{f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N}\cdot m_\lambda\}$ 构成 $M(\lambda)$ 一组基.

推论：$\forall\, x\in M(\lambda),\ \exists!\ u\in\mathcal{U}(N^-)$, s.t. $x=u\cdot m_\lambda$

§4、权空间分解若干性质.

下设 H, L 为 Lie 代数，L 为 H 模，(若 L 为一般向量空间，则可视为交换 Lie 代数)

$L_\mu=\{x\in L \mid (\mathrm{ad}\,h-\mu(h))^{n(x,h)}\cdot x=0,\ \forall h\in H\}$

①. $\forall\, x\in L_\lambda,\ y\in L_\mu$，有 $[xy]\in L_{\lambda+\mu}$

且 $n([xy],h)$ 可取 $n(x,h)+n(y,h)-1$

pf: 由 $(\mathrm{ad}\,h-(\lambda+\mu)(h))^n[x,y]=\sum_{i=0}^{n} C_n^i[(\mathrm{ad}\,h-\lambda(h))^i x,(\mathrm{ad}\,h-\mu(h))^{n-i}y]$ 立见

②. $L_\lambda\cap \sum_{\mu\neq\lambda} L_\mu=0$

③. L 上所有权向量生成 L 的子模 L_H,

则 L_H 为 L 子代数，且有权空间分解

pf: L_H 由权向量生成，由① $\Rightarrow L_H=\sum_\mu L_\mu$ 为 L 子代数.($[,]$ 封闭)

由② $\Rightarrow L_H=\bigoplus_\mu L_\mu$

note: 此外，权空间分解存在则唯一.

④. 若 $L=\langle\{x_i \mid i\in I\}\rangle$，且 x_i 为 λ_i 的权向量

则 (1) $L=L_H$，即 L 本身有权空间分解

(2) $L=\mathrm{span}\{\mathrm{ad}x_{i_1}\cdots \mathrm{ad}x_{i_{r-1}}x_{i_r} \mid i_k\in I\}$

(3) $L_\mu\neq 0 \Rightarrow \mu$ 为 λ_i 的非负整数线性组合.

且 $L_\mu=\mathrm{span}\{\mathrm{ad}x_{i_1}\cdots \mathrm{ad}x_{i_{r-1}}x_{i_r} \mid \lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_r}=\mu\}$

pf: (2): 由 $[[x,y],z]=(\mathrm{ad}x\cdot\mathrm{ad}y-\mathrm{ad}y\cdot\mathrm{ad}x)z$

$\Rightarrow \{x_i\}$ 上的 Lie 括号总可以化为 $\mathrm{ad}x_{i_1}\cdots \mathrm{ad}x_{i_{r-1}}x_r$ 形式.

(详见 Cpt9.3，亦可用自由 Lie 代数体会)

(3) $x\in L_\mu \Rightarrow x$ 被 (2) 中某些线性表示.

由上①②，$\Rightarrow x$ 被 $\{\mathrm{ad}x_{i_1}\cdots \mathrm{ad}x_{i_{r-1}}x_{i_r} \mid \lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_r}=\mu\}$ 线性表示. #

(4). L 的子模与商模均有权空间分解.

Pf: L 的权向量亦为商模权向量. $\Rightarrow$ 商模 ✓.

$K\leq L$，$\forall y=\sum_i k_i x_i\in K$，

归纳得 $k_i\neq 0$ 时，$x_i\in K \Rightarrow K$ 由权向量生成.（详见 Cpt7 整理）

note: 由 (4)，L 有权空间分解 $\Leftrightarrow L$ 由权向量生成

(5) 当 $L_{\lambda_i}=\{x\in L \mid (\mathrm{ad}h-\lambda_i(h))\cdot x=0,\ \forall h\in H\}$ 时，

由①，$n([x,y],h)=n(x,h)+n(y,h)-1=1$

$\Rightarrow$ (1) 时 $L=\bigoplus_\mu L_\mu$，且 $L_\mu=\{x\in L \mid (\mathrm{ad}h-\mu(h))x=0,\ \forall h\in H\}$.

note: 以上不要求 H 为幂零模.

Cpt2 中，$\dim L<\infty$，H 幂零时，L 必有权空间分解.

在 $\dim L=\infty$ 情形，以上技巧就经常用到了！

5、$M(\lambda)$ 的权空间分解.

① . $M(\lambda)=U(L)/K_\lambda \Rightarrow M(\lambda)$ 为 $U(L)$ 模

$\Rightarrow M(\lambda)$ 为 L 模

$\Rightarrow M(\lambda)$ 为 H 模.

②. 令 $M(\lambda)_\mu = \{ m \in M(\lambda) \mid (x - \mu(x)\cdot 1)\, m = 0,\ \forall x \in H \}$

则 (1) $M(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in H^*} M(\lambda)_\mu$

(2) $M(\lambda)_\mu \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - \mu$ 为若干正根和.（0个也行）

(3) 令 $\wp(\lambda-\mu)$ 为 $\lambda - \mu = r_1\beta_1 + \cdots + r_N\beta_N$ 对 $\{r_i\}$ 的非负整数解数.

则 $\dim M(\lambda)_\mu = \wp(\lambda-\mu)$

Pf: (1) 由 $h_i f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} \cdot m_\lambda = \sum_{i=1}^{N} -r_i \beta_i(h) \cdot f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} h_i\, m_\lambda$

$= \left(\lambda(h_i) - \sum_{i=1}^{N} r_i \beta_i(h)\right) \cdot f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} \cdot m_\lambda$

$\Rightarrow f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} \cdot m_\lambda \in M(\lambda)_\mu,\quad \mu = \lambda - \sum_{i=1}^{N} r_i \beta_i$

又 $M(\lambda) = \mathrm{span}\{ f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} \cdot m_\lambda \}$

$\Rightarrow$ $M(\lambda)$ 有权空间分解

(2)(3) 由 $M(\lambda)_\mu = \mathrm{span}\{ f_{\beta_1}^{r_1} \cdots f_{\beta_N}^{r_N} \mid r_1\beta_1 + \cdots + r_N\beta_N = \lambda - \mu \}$ 之又.

③. $M(\lambda)_\mu \neq 0$ 时，称 μ 为 $M(\lambda)$ 的权，

并称 $M(\lambda)_\mu$ 为相应的权空间.

note: 此处，权空间分解与 Cpt 2 中定义一样.

④. $M(\lambda)$ 有唯一的极大子L模.

Pf: 设 V 为 $M(\lambda)$ 的真子L模.

$V \subseteq M(\lambda) \Rightarrow V = \bigoplus_\mu V_\mu$,

$V \neq M(\lambda) \Rightarrow V_\lambda = 0$，否则，由 $M(\lambda)_\lambda = \mathrm{span}\{1 + K_\lambda\}$

$\Rightarrow 1 + K_\lambda \in V_\lambda$.

$\Rightarrow V_\lambda = M(\lambda)$ 矛

$\Rightarrow V = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V_\mu \subseteq \bigoplus_{\mu \neq \lambda} M_\mu$

令 $J(\lambda)$ 由 $M(\lambda)$ 的所有真子模生成

$\Rightarrow J(\lambda) \subseteq \bigoplus_{\mu \neq \lambda} M_\mu \neq M(\lambda)$

$\Rightarrow J(\lambda)$ 为 $M(\lambda)$ 的唯一的极大真子模.

note: 真子模有公共上界 $\Rightarrow$ 极大子模存在且唯一.

6. 权模

① 定义 H^* 上偏序，

$\forall \mu_1, \mu_2 \in H^*$，$\mu_1 \succeq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_2$ 为 H^* 上若干正根之和

于是，μ 为 $M(\lambda)$ 的权，$\Leftrightarrow \lambda \succeq \mu$.

并称 $M(\lambda)$ 为以 λ 为最高权的 verma 模.

②. 令 $L(\lambda) = M(\lambda)/J(\lambda)$，$J(\lambda)$ 为 $M(\lambda)$ 的极大子 $\mathcal{U}(L)$ 模

$\Rightarrow L(\lambda)$ 为不可约 $\mathcal{U}(L)$ 模

③. $L(\lambda)$ 视为 H 模有相应权空间分解，

由 $J(\lambda)_\lambda = 0 \Rightarrow \dim L(\lambda)_\lambda = 1$

且 λ 为其最高权值，$m_\lambda + J(\lambda)$ 为相应权向量.

下面几节将考虑 $L(\lambda)$ 何时为有限维的.

Cpt 10.2. 有限维不可约模

0. 下设 V 为有限维不可约 L 模

L 为有限维半单 Lie 代数，H 为某 cartan 子代数

h_i, e_α, f_α，$\alpha \in \Phi^+$，$i = 1, \cdots, l$ 作成 L 一组基.

1. V 的权空间分解

① V 为 L 模 $\Rightarrow V$ 为 H 模，

由 $\dim V < \infty$，H 幂零 $\Rightarrow V$ 作为 H 模有权空间分解 $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$

其中 $V_\lambda = \{v \in V \mid (h - \lambda(h))^{n(v,h)} v = 0,\ \forall h \in H\}$

②. 令 $W_\lambda = \{v \in V \mid (h - \lambda(h)) v = 0,\ \forall h \in H\}$，则 $V_\lambda = W_\lambda$

我们证明一个更为一般的命题.

lemma：H 为 L 子模且 L 作为 H 模有权空间分解 $L = \bigoplus_\mu L_\mu$

V 为 L 模，且 V 作为 H 模有权空间分解 $V = \bigoplus_\mu V_\mu$

则 $\forall e_\lambda \in L_\lambda$，$v_\mu \in V_\mu$，有 $e_\lambda v_\mu \in V_{\lambda+\mu}$

pf: recall Cpt2 公式.

$$\underbrace{(h-(\lambda+\mu)(h))^n}_{gl(V)}\cdot \underbrace{e_\lambda v_\mu}_{\text{模}} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \underbrace{(\mathrm{ad}\,h-\lambda(h))^i}_{\text{lie}} \cdot \underbrace{e_\lambda}_{gl(V)} \cdot \underbrace{(h-\mu(h))^{n-i}}_{gl(V)} v_\mu$$

$e_\lambda \in L_\lambda,\ v_\mu \in V_\mu \Rightarrow \begin{cases} (\mathrm{ad}\,h-\lambda(h))^{n(e_\lambda,h)} e_\lambda = 0, \\ (h-\mu(h))^{n(v_\mu,h)} v_\mu = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (h-(\lambda+\mu)(h))^{n(e_\lambda v_\mu,h)} e_\lambda v_\mu = 0$

即 $e_\lambda v_\mu \in V_{\lambda+\mu}$, 其中 $n(e_\lambda v_\mu, h)$ 可取 $n(e_\lambda,h)+n(v_\mu,h)-1$.

特别地, 对 $V_\lambda' = \{v\in V \mid (h-\lambda(h))v=0, \forall h\}$, 有 $L_\lambda' V_\mu' \subseteq V_{\lambda+\mu}'$

$L_\lambda' = \{x\in L \mid (\mathrm{ad}\,h-\lambda(h))x=0, \forall h\}$

于是, 但命题中, 令 $0\neq W = \bigoplus_\lambda W_\lambda \Rightarrow L_\lambda W_\mu \subseteq W_{\lambda+\mu} \subseteq W, \forall \lambda,\mu$.

$\Rightarrow W$ 为 V 的子 L 模

由 V 不可约 $\Rightarrow W=V$

③. 设 $V=\bigoplus_\mu V_\mu$ 为 V 关于 H 的权空间分解

令 $\Phi_V = \{\mu\in H^* \mid V_\mu \neq 0\}$, 则 $|\Phi_V|<\infty$

$\Rightarrow \exists \lambda\in\Phi_V$, λ 关于偏序 $<$ 为极大元.

(即 $\forall \mu\in\Phi_V\setminus\{\lambda\}$, $\mu-\lambda$ 不为正根之和)

取 $v_\lambda\in V_\lambda$, 则有 (1). $h v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda$ (trivial)

(2) $e_\alpha v_\lambda = 0,\ \forall \alpha\in\Phi^+$ ($e_\alpha v_\lambda \in V_{\lambda+\alpha}$ 已证)

(3) $V = \mathcal{U}(N^-) v_\lambda$

(4) λ 为 Φ_V 中的最大权

pf: (3). V 不可约 $\Rightarrow V = \mathcal{U}(L) v_\lambda$

$= \mathcal{U}(N^-)\cdot\mathcal{U}(B) v_\lambda$

$= \mathcal{U}(N^-) v_\lambda$

(4) 由 (3), V 由 $f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N} v_\lambda$ 线性生成

$\Rightarrow V_\mu = \mathrm{span}\{f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N} v_\lambda \mid \lambda-\sum_{i=1}^N r_i\beta_i = \mu\}$

$\Rightarrow \mu \le \lambda.$

综上，λ为唯一的极大权即最高权，且 $\dim V_\lambda = 1$

(4). $\exists !$ L模同态 $\theta: M(\lambda) \to V$, s.t. $\theta(m_\lambda) = v_\lambda$

pf: 由 $M(\lambda) = U(L)\cdot m_\lambda \Rightarrow$ 唯一性.

注意到 $M(\lambda) = U(N^-)m_\lambda$，及 $V = U(N^-)v_\lambda$

令 $\theta: M(\lambda) \to V$ $\Rightarrow$ θ良定义且满射.

$u\cdot m_\lambda \mapsto u v_\lambda$

易见θ线性性，只须证θ为模同态.

即 $\forall y \in U(L)$，右图交换

$$\begin{tikzcd} M(\lambda) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ M(\lambda) \arrow[r, "\theta"] & V \end{tikzcd}$$

$u\cdot m_\lambda \quad u\cdot v_\lambda \quad y u m_\lambda \quad y u v_\lambda$

即证 $\theta(y u m_\lambda) = y u v_\lambda$，

$\forall\, u = f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_r}}$, $e_i, f_i, h_i \in L$. $i_1 \le \cdots \le i_r$

有 $\theta f_i \cdot f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_r}} m_\lambda = f_i \cdot f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_r}} \cdot v_\lambda$

$\theta\, h_i f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_r}} m_\lambda = \theta\big(\lambda(h_i) - \sum_{k=1}^{r} \beta_{i_k}(h_i)\big)\cdot f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_r}} m_\lambda$

$= \big(\lambda(h_i) - \sum_{k=1}^{r} \beta_{i_k}(h_i)\big) f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_r}} v_\lambda$

$= h_i \cdot f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_r}} v_\lambda$

$\theta\, e_i f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_r}} m_\lambda = \theta \sum_{k=1}^{r} f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_{k-1}}} [e_i f_{\beta_{i_k}}] f_{\beta_{i_{k+1}}}\cdots f_{\beta_{i_r}} m_\lambda$

上一结论 $= \sum_{k=1}^{r} f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_{k-1}}} [e_i f_{\beta_{i_k}}] f_{\beta_{i_{k+1}}}\cdots f_{\beta_{i_r}} v_\lambda$

$= e_i f_{\beta_{i_1}}\cdots f_{\beta_{i_r}} v_\lambda$

其中 $[e_i f_{\beta_{i_k}}] \in H$

note: 由此可体会 Cpt 7 中，将 End $F^{\sim}$ 视为 $\tilde{L}(A)$ 模

$\Downarrow$

$F^{\sim}$ 为 $U(N^-)$ 模，且令 $\lambda = 0$.

推论: $V \cong L(\lambda)$

pf: $V \cong M(\lambda)/\mathrm{Ker}\,\theta$ 为不可约模

$\Rightarrow \ker\theta$ 为 $M(\lambda)$ 极大子模

$\Rightarrow \ker\theta = J(\lambda)$, #

2. 若 $\dim L(\lambda) < \infty$, 则 $\lambda(h_i)$ 为非负整数 $\forall i$

pf: 令 $v_\lambda = m_\lambda + J(\lambda) \in L(\lambda)_\lambda$ 为最高权的权向量.

令 $e_i \in L_{\alpha_i}$, $f_i \in L_{-\alpha_i}$ s.t. $[e_i f_i] = h_i$

$\dim L(\lambda) < \infty \Rightarrow \exists p \geq 0$ s.t. $f_i^k v_\lambda \neq 0$, $0 \leq k \leq p$

$f_i^{p+1} v_\lambda = 0$,

令 $M = \sum_{k=0}^{p} C \cdot f_i^k v_\lambda$, 由 $f_i^k v_\lambda \in L(\lambda)_{\lambda - k\alpha_i}$

$\Rightarrow M = \bigoplus_{k=0}^{p} C \cdot f_i^k v_\lambda$ 为 M 的 H 模分解

由 $f_i M \subseteq M$, $h_i M \subseteq M$ 及 $e_i M \subseteq M$ (归纳易证, 用 (pt7))

$\Rightarrow M$ 为 $\langle e_i, f_i, h_i \rangle$ 作用的不变子空间 (或看成子模)

$\Rightarrow tr_M h_i = tr_M([e_i f_i]) = tr_M(e_i f_i - f_i e_i) = 0$

又 $h_i f_i^k v_\lambda = (\lambda - k\alpha_i)(h_i) f_i^k v_\lambda$

$\Rightarrow 0 = tr_M h_i = \sum_{k=0}^{p} (\lambda - k\alpha_i)(h_i)$

$= (p+1)\lambda(h_i) - \frac{1}{2} p(p+1)\alpha_i(h_i)$ $\quad \alpha_i(h_i) = 2$

$= (p+1)(\lambda(h_i) - p)$

$\Rightarrow \lambda(h_i) = p$. #

note: 这里技巧类似 cartan 分解中,

令 $M = \bigoplus_{k=-q}^{p} L_{k\alpha+\beta}$ 推导 $\frac{\langle h_\alpha', h_\beta' \rangle}{\langle h_\alpha', h_\alpha' \rangle} = \frac{p-q}{2}$

下一节将证明, 这一条件足矣使 $L(\lambda)$ 为有限维.

Cpt 10.3. 有限维准则.

0. 下设 $\lambda \in H^*$ s.t. $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_+$, $\forall i = 1, \ldots, l$

1. 对偶基和相关定义

① 令 $w_i \in H^*$ s.t. $w_i(h_j) = \delta_{ij}$

$\Rightarrow \{w_i\}$ 作成 $\{h_i\}$ 在 H^* 上的对偶基.

并称 $\{w_i\}$ 为基本权集

②. 令 $X = \{\sum_i n_i w_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow X$ 为 H^* 的自由加法子群

并称 X 为整权的格或权格 (weight lattice)

③. 令 $X^+ = \{\sum_i n_i w_i \mid n_i \in \mathbb{Z}_+\}$ 称为主整权集 (dominant integral ~)

于是, $\dim L(\lambda) < \infty \Rightarrow \lambda \in X^+$

本书考察其逆命题, 即 $\lambda \in X^+ \Rightarrow \dim L(\lambda) < \infty$

2. $\{w_i\}$ 与 $\{\alpha_i\}$ 关系

①. $\alpha_i = \sum_j \alpha_i(h_j) \cdot w_j = \sum_j \frac{2\langle h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}\rangle}{\langle h_{\alpha_j}, h_{\alpha_j}\rangle} w_j$

$= \sum_j A_{ji} w_j$

$\Rightarrow \Pi \subseteq X$, 即 Π 为 w_i 的整系数线性组合.

note: 反之不然, 例 A_1 上, $\alpha_1 = 2w_1$, 但 $w_1 = \frac{1}{2}\alpha_1$

②. $(\alpha_1, \cdots \alpha_l) = (w_1, \cdots w_l) A$

$\Rightarrow (w_1, \cdots w_l) = (\alpha_1 \cdots \alpha_l) A^{-1}$

$\Rightarrow w_i = \sum_j (A^{-1})_{ji} \alpha_j$

③. $\langle w_i, \alpha_j\rangle = \delta_{ij} \cdot \frac{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}{2}$

pf:

$$\left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \end{pmatrix}, \left(\frac{2\alpha_1}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}, \cdots, \frac{2\alpha_l}{\langle\alpha_l,\alpha_l\rangle}\right) \right\rangle$$

$$= \left\langle A^{-T}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_l \end{pmatrix}, \left(\frac{2\alpha_1}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}, \cdots, \frac{2\alpha_l}{\langle\alpha_l,\alpha_l\rangle}\right) \right\rangle$$

$$= A^{-T} \cdot \left(\frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}\right) = A^{-T} \cdot A^T = E$$

④ 记 $A^{-T} = (c_{ij})$, 则 $w_i = \sum_j c_{ij} \alpha_j$

$\Rightarrow \langle w_i, w_j\rangle = c_{ij} \langle \alpha_i, w_j\rangle$

$= \frac{1}{2}\langle\alpha_i, \alpha_i\rangle \cdot c_{ij}$

$\Rightarrow c_{ij} = \dfrac{2\langle w_i, w_j\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle}$

3. A^{-1} 性质

① lemma: V 为以 $\{v_i\}_{i=1}^n$ 为基的欧氏空间，

$\{w_i\}$ 为 $\{v_i\}$ 关于内积 $\langle , \rangle$ 的对偶基，即 $\langle w_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$

若 $\langle v_i, v_j\rangle \le 0$, $i\ne j$，则 $\langle w_i, w_j\rangle \ge 0$, $\forall i,j$

pf: 归纳法，$n=1 \Rightarrow \langle w_1, w_1\rangle > 0$，立证

$n>1$ 时，假设 $n-1$ 命题成立，

令 $U = \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ U上对偶基

$= \mathrm{span}\{w_1', \cdots, w_{n-1}'\}$

$\Rightarrow U^\perp = \{v\in V \mid \langle v, U\rangle = 0\} = \mathrm{span}\{w_n\}$

又 $\langle w_i', U\rangle = \langle w_i, U\rangle$，即 w_i' 为 w_i 在 U 上投射，$i<n$

$\Rightarrow w_i - w_i' \in U^\perp = \mathrm{span}\{w_n\}$

$\Rightarrow w_i - w_i' = \lambda_i w_n$, $i<n$

由归纳假设，$\langle w_i', w_j'\rangle \ge 0$, $\forall i,j<n$

设 $w_i' = \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} v_k \Rightarrow 0 \le \langle w_i', w_j'\rangle = c_{ij}$, $\forall i,j<n$

$\Rightarrow w_i'$ 为 $\{v_k\}$ 的非负线性组合，$\forall i<n$

由 $w_i = w_i' + \lambda_i w_n$，点乘 v_n

$\Rightarrow 0 = \langle v_n, w_i'\rangle + \lambda_i$

$\Rightarrow \lambda_i = -\langle v_n, w_i'\rangle = -\langle v_n, \sum_{k=1}^{n-1} c_{ik} v_k\rangle \ge 0$

于是，$\langle w_i, w_j\rangle = \langle w_i' + \lambda_i w_n, w_j' + \lambda_j w_n\rangle$

$= \langle w_i', w_j'\rangle + \lambda_i\lambda_j\langle w_n, w_n\rangle \ge 0$, $\forall i,j<n$

$\langle w_i, w_n\rangle = \langle w_i' + \lambda_i w_n, w_n\rangle = \lambda_i\langle w_n, w_n\rangle \ge 0$. $\forall i<n$.

由归纳法，命题得证。

思路：限制 $U = \mathrm{span}\{v_i \mid i<n\} = \mathrm{span}\{w_i' \mid i<n\}$ 上，

$w_i = w_i' + \lambda_i w_n$，借由 $\lambda_i \ge 0$，实现降阶归纳。

note: w_i 为 $\{v_i\}$ 在 V 上对偶基 $\Rightarrow w_i = \langle v_j \rangle_{j\neq i}^{\perp}$

推论：w_i 为 $\{v_i\}$ 非负线性组合（过程略）

③. 回到上一命题，有 (1) $\langle w_i, w_j \rangle \geq 0$, $\forall i, j$

(2) w_i 由 $\{\alpha_i\}$ 的非负线性表示.

(3) $A^{-T} = (c_{ij})$ 中, $c_{ij} \geq 0$

(4) A^{-1} 由非负元素构成.

Pf: 由 $\langle w_i, \frac{2\alpha_j}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \rangle = \delta_{ij}$, 且 $\langle \frac{2\alpha_j}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}, \frac{2\alpha_i}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \rangle \leq 0$.

由引理及推论, 立证

4. 有限维定理.

下设 $\lambda \in X^+$, $\{e_i, f_i, h_i\}$ 为 L 的 Lie 代数生成元.

$v_\lambda = m_\lambda + J(\lambda) \in L(\lambda) = M(\lambda)/J(\lambda)$ 为最高权向量.

①. $M(\lambda)$ 作为 H 模有权空间分解

$\Rightarrow L(\lambda)$, $J(\lambda)$ 及相关商模子模均有权空间分解

②. 令 $k_i = \lambda(h_i) + 1$, 则 $f_i^{k_i} v_\lambda = 0$

Pf: $f_i^{k_i} v_\lambda = 0 \Leftrightarrow f_i^{k_i} m_\lambda \in J(\lambda)$ (J(λ) 极大性) $\forall m \in M(\lambda) \setminus J(\lambda)$, $U(L)m = M(\lambda)$

$\Leftrightarrow U(L) f_i^{k_i} m_\lambda \neq M(\lambda)$

$\Leftrightarrow U(L) f_i^{k_i} m_\lambda \subseteq J(\lambda)$

只须证 $U(L) f_i^{k_i} m_\lambda$ 为 $M(\lambda)$ 真子模.

recall: $y \cdot x_1 \cdots x_r = \sum_{k=1}^{r} x_1 \cdots x_{k-1} [y, x_k] x_{k+1} \cdots x_r + x_1 \cdots x_r \cdot y$

(1) $h_j f_i^{k_i} m_\lambda = (\lambda - k_i \alpha_i)(h_j) f_i^{k_i} m_\lambda$

又 $f_i^{k_i} m_\lambda \in M(\lambda)_{\lambda - k_i \alpha_i}$

$\Rightarrow h_j f_i^{k_i} m_\lambda = 0$, $\forall j$

(2) $e_j f_i^{k_i} m_\lambda = f_i^{k_i} e_j m_\lambda = 0$, $j \neq i$

$e_i f_i^{k_i} m_\lambda = \sum_{k=1}^{k_i} f_i^{k-1} h_i f_i^{k_i - k} \cdot m_\lambda$

$= \sum_{k=1}^{k_i} f_i^{k_i - 1} (\lambda(h_i) - (k_i - k) \alpha_i(h_i)) \, m_\lambda$

$= (k_i \cdot \lambda(h_i) - \sum_{k=1}^{k_i} 2(k_i - k))\, f_i^{k_i-1} m_\lambda$ $\quad \lambda_i(h_i) = 2$

$= k_i \cdot (\lambda(h_i) - (k_i - 1))\, f_i^{k_i-1} m_\lambda = 0.$

故 $\mathcal{U}(L) f_i^{k_i} m_\lambda = \mathcal{U}(N^-) f_i^{k_i} m_\lambda$ 为 $M(\lambda)$ 的真子 H 模

$\Rightarrow \mathcal{U}(L) f_i^{k_i} m_\lambda$ 为 $M(\lambda)$ 的真子 L 模 #

推论：$e_i f_i^n v_\lambda = (n(\lambda(h_i)) - (n-1)) f_i^{n-1} + f_i^n e_i v_\lambda$

Q：插一个问题：$\mathcal{U}(L)$ 作为 H 模的相大权分解空间为何？⇒ 没有权分解

③. 令 $K = Cv_\lambda + Cf_i v_\lambda + \cdots + Cf_i^{k_i-1} v_\lambda$,

则 K 作成 $L(\lambda)$ 的有限维 $<e_i, H, f_i>$ - 子模.

pf: 易见 $f_i K \subseteq K$.

K 为 H 模 $\Rightarrow HK \subseteq K$

又 $e_i f_i^n v_\lambda = n(\lambda(h_i) - (n-1)) f_i^{n-1} v_\lambda \in K$.

$\Rightarrow K$ 为有限维 $<e_i, H, f_i>$ - 子模.

④. lemma：U 为 $L(\lambda)$ 的有限维 $<e_i, H, f_i>$ 子模

$\Rightarrow LU$ 亦为 $L(\lambda)$ 的有限维 $<e_i, H, f_i>$ 子模

note：$LU = \{xu \mid x \in L, u \in U\}$

pf: $\dim L, \dim U < \infty \Rightarrow \dim LU < \infty$

$\forall u \in U, x \in L$, 对 $\forall y \in <e_i, H, f_i>$

有 $y(xu) = \underset{L}{x}\, \underset{U}{\underline{yu}} + \underset{L}{\underline{[yx]}}\, \underset{U}{u} \in LU$.

#

推论：$L(\lambda)$ 由其有限维 $<e_i, H, f_i>$ 子模线性张成

pf: 设张成空间为 V, 由 lemma, $LV \subseteq V$

$\Rightarrow V$ 为 $L(\lambda)$ 子模,

又③ $\Rightarrow V \neq 0$, 由 $L(\lambda)$ 不可约 $\Rightarrow L(\lambda) = V$.

⑤. $L(\lambda)$ 由 $<e_i, H, f_i>$ - 模张成

$\Rightarrow L(\lambda)$ 权空间分解中, 可由 $<e_i, H, f_i>$ - 模取得一组基.

记 Λ 为 $L(\lambda)$ 的权集，W 为 weyl群，下证 $W\Lambda=\Lambda$

Pf: $\forall \mu\in\Lambda$, $v_\mu\in L(\lambda)$ 落在某一 $\langle e_i, H, f_i\rangle$ 子模 U 中

U 有限维 $\Rightarrow \exists p,q\geq 0$, s.t. $f_i^n v_\mu\neq 0$, $n\leq p$, $f_i^{p+1}v_\mu=0$

$e_i^n v_\mu\neq 0$, $n\leq q$, $e_i^{q+1}v_\mu=0$

$\Rightarrow \mu+k\alpha_i\in\Lambda$, $-p\leq k\leq q$.

令 $V=\sum_{r=0}^{p}\sum_{t=0}^{q} C.f_i^r e_i^t v_\mu$，则

(1) V 为 H 模 $\Rightarrow HV\subseteq V$

(2) $e_i f_i^r e_i^t v_\mu=(f_i^r e_i^{t+1}+r(\mu(h_i)-(r-1))f_i^{r-1}e_i^t)v_\mu\in V$

(3) $f_i^{p+1}e_i^t v_\mu=\underbrace{e_i f_i^{p+1}e_i^{t-1}v_\mu}_{\text{归纳 }V}-(p+1)(\mu(h_i)-p)(f_i^p e_i^t)v_\mu\in V$

$\Rightarrow V$ 作成 $\langle e_i, H, f_i\rangle$ - 子模

$\Rightarrow 0=tr_V[e_i f_i]=tr_V h_i=\sum_{r=0}^{p}\sum_{t=0}^{q}((t-r)\alpha_i(h_i)+\mu(h_i))$

$=(p+1)(q+1)\mu(h_i)+\sum_{r=0}^{p}\sum_{t=0}^{q}2(t-r)$

$=(p+1)(q+1)(\mu(h_i)-(p-q))$

$\Rightarrow \mu(h_i)=p-q$.

※. 此式子尤为重要，与 W 联系起来！

recall: 记 $S_i=S_{\alpha_i}$

$\Rightarrow S_i\mu=\mu-\frac{2\langle\alpha_i,\mu\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\alpha_i=\mu-\frac{2\langle h_{\alpha_i}', h_\mu'\rangle}{\langle h_{\alpha_i}, h_{\alpha_i}\rangle}\alpha_i$

$=\mu-\langle h_i, h_\mu'\rangle\alpha_i$

$=\mu-\mu(h_i)\alpha_i$

于是 $S_i\mu=\mu-(p-q)\alpha_i$,

由 $-p\leq-(p-q)\leq q \Rightarrow S_i\mu\in\Lambda$,

以上讨论对 $i=1,\dots,l$ 成立 $\Rightarrow W\mu=\langle S_1,\dots,S_l\rangle\mu\subseteq\Lambda$

故 $W\Lambda\subseteq\Lambda$.

即，用不变子空间技巧导出 $\mu(h_i)$ 继而得到 $S_i\mu$ 的信息.

⑥. 由 β_i 为单根的整系数组合且单根 $\Pi \subseteq X \Rightarrow \beta_i \in X$

又由 $\lambda \in X^+ \Rightarrow M(\lambda)$ 的权集 $\{\lambda - \sum_{i=1}^{N} r_i\beta_i\} \subseteq X$

又 $L(\lambda)$ 的权均为 $M(\lambda)$ 中权，$\Rightarrow \Lambda \subseteq X$

下证 $\forall \mu \in \Lambda$, $\exists\, w \in W$ s.t. $w\mu \in X^+$

Pf: $|W| < \infty \Rightarrow |W\mu| < \infty$

$\Rightarrow \exists\, \nu \in W\mu$ s.t. ν 关于 $\prec$ 极大

(即 $\forall \nu' \in W\mu$, $\nu' \neq \nu$ 时，$\nu' - \nu$ 不为若干正根之和.)

又 $s_i\nu = \nu - \nu(h_i)\alpha_i$

$\Rightarrow \nu - s_i\nu = \nu(h_i)\alpha_i$

$\therefore \nu$ 与 $s_i\nu$ 有关系，

由 ν 极大性 $\Rightarrow \nu(h_i) \geq 0$.

讨论对 $\forall i = 1, \cdots, l$ 成立. 故 $\nu \in X^+$ 即为所求.

⑦ 综合以上讨论，我们得到 $\dim L(\lambda) < \infty$.

Pf: 由 $\dim L(\lambda)_\mu \leq \dim M(\lambda)_\mu = \mathcal{P}(\lambda - \mu) < \infty$

知 $\dim L(\lambda) < \infty \Leftrightarrow |\Lambda| < \infty$

由 $W\Lambda = \Lambda$ 且任一W轨道经过 X^+

只须证 $|\Lambda \cap X^+| < \infty$

再由 $\lambda \in X^+$, $\forall \mu \in \Lambda$, $\mu \preceq \lambda$ 立证.

推论: (1) $\dim L(\lambda)_\mu \leq \mathcal{P}(\lambda - \mu)$

(2) 令 $\Phi_0 = \{\mu \in X^+ \mid \mu \preceq \lambda\}$, 则 $\Lambda \subseteq W\Phi_0$. $L^2 = L$，一维模仍重模. $\Downarrow$ $L \to 0$

特别地，$\lambda = 0$ 时，$\Lambda = \{0\}$. $L(\lambda) = \mathbb{C}\cdot v_\lambda$ 为一维不可约模.

思路总结: (1) 由 $\dim L(\lambda)_\mu \leq \mathcal{P}(\lambda - \mu)$ 只须证某权集有限.

(2) $\lambda \in X \Rightarrow M(\lambda)$ 权集在 X 上

$\Rightarrow L(\lambda)$ 权集在 X 上

由 $\mu - s_i\mu = \mu(h_i)\alpha_i$ 知，$W\mu$ 上极大元在 X^+ 上.

$\Rightarrow W\mu$ 经过 X^+ 上点.

又 $|\Lambda \cap X^+| < \infty$, 只须证 $W\Lambda = \Lambda$

(3) 由 $W = \langle \{s_i\} \rangle$, 只须证 $\forall \mu \in \Lambda$, $s_i\mu \in \Lambda$

(4) 若 μ 落在有限维 $\langle e_i, H, f_i \rangle$ 子模上

$\Rightarrow V = \sum_{r=0}^{p} \sum_{t=0}^{q} f_i^r e_i^t v_\mu$ 作成 $\langle e_i, H, f_i \rangle$ 子模

由 $tr_V h_i = 0$ 导出 $\mu(h_i) = p-q$

继而得到 $s_i\mu = \mu - (p-q)\alpha_i \in \Lambda$ 为所需命题.

(5) 因此, 只须证 有限维 $\langle e_i, H, f_i \rangle$ 子模 线性组成 $L(\lambda)$

注意到 U 有限维 $\langle e_i, H, f_i \rangle$ 模 $\Rightarrow LU$ 亦是

由 $L(\lambda)$ 不可约性, 只须证 存在非零 U.

(6) 最后, 先证 $\mathcal{U}(L).f_i^{k_i} m_\lambda$ 为 $M(\lambda)$ 真子模, $k_i = \lambda(h_i)+1$

$\Rightarrow f_i^{k_i} m_\lambda \in J(\lambda)$

$\Rightarrow f_i^{k_i} v_\lambda = 0$

$\Rightarrow K = \sum_{k=0}^{k_i} f_i^k v_\lambda$ 为所需 $\langle e_i, H, f_i \rangle$ 模.

5. 同构性及维数

(1). 设 L 为 $\mathbb{C}$ 上半单 Lie 代数, 同构意义下 $\{L(\lambda) \mid \lambda \in X^+\}$

构成所有有限维不可约 L 模全体, 且 $\lambda \neq \mu$ 时 $L(\lambda) \ncong L(\mu)$

Pf: 命题前部分由上一节及上面定理得到.

$\because \lambda, \mu$ 分别为 $L(\lambda), L(\mu)$ 上唯一的 highest 权

$\lambda \neq \mu$ 时, 自然有 $L(\lambda)$ 与 $L(\mu)$ 不同构

note: "互不同构性" 用到 "有限维 L 模 有唯一最高权"

因而不可直接推广为一般 $\lambda, \mu \in H^*$

note 2: $M(\lambda)$ 的相关 L 模存在性, 用到 L 半单性导出的权空间分解

因而一般 L 模未必有 相关 $L(\lambda)$

(2). 维数平移: $\forall \lambda \in X^+$, $w \in W$, $\Rightarrow \dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu}$

pf: 由 $W=\langle\{s_i\}\rangle$，只须证 $\dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{s_i\mu}$

recall L 上自同构 $\theta_i = e^{\mathrm{ad}\, e_i}\cdot e^{-\mathrm{ad}\, f_i}\circ e^{\mathrm{ad}\, e_i}$ s.t. $\theta_i|_H = s_i$

(1) 对 $L(\lambda)$ 定义新的 L 作用，得到 $\tilde{L}(\lambda)$

即 $L\times \tilde{L}(\lambda)\to \tilde{L}(\lambda)$

$$(x,\bar{v}) \mapsto \overline{(\theta_i x) v}$$

θ_i 为 Lie 自同构 ⇒ 双线性.

且
$$[xy]\bar{v} = \overline{\theta_i([xy])v} = \overline{[\theta_i x,\theta_i y]v}$$
$$= \overline{\theta_i x\cdot\theta_i y\, v} - \overline{\theta_i y\,\theta_i x\, v}$$
$$= (xy-yx)\bar{v}$$

⇒ $\tilde{L}(\lambda)$ 作成 L 模

(2) $\forall v \in L(\lambda)_\mu,\ h\in H$

有
$$h\bar{v} = \overline{\theta_i(h) v} = \overline{s_i(h) v} = \overline{\mu(s_i(h)) v}$$
$$= \mu(s_i(h))\bar{v} \in \tilde{L}(\lambda)_{s_i\mu}$$

同理，$\bar{v}\in \tilde{L}(\lambda)_{s_i\mu}$

⇒ $\overline{s_i(h)v} = h\bar{v} = \mu(s_i(h))\bar{v} = \overline{\mu(s_i(h))v}$，$\forall h\in H$

⇒ $\overline{hv}=\overline{\mu(h)v}$，$\forall h\in H$ $\}$ $\bar{v}=0 \Leftrightarrow v=0$

⇒ $hv=\mu(h)v$

由此，双射 $\varphi: L(\lambda)\to\tilde{L}(\lambda)$

$$v\mapsto \bar{v}$$

建立了 $L(\lambda)_\mu \mapsto \tilde{L}(\lambda)_{s_i\mu}$ 的对应.

(3). ∵ $\bar{M}$ 为 $\tilde{L}(\lambda)$ 子模 ⇒ $L\bar{M}\subseteq \bar{M}$

⇒ $\overline{\theta_i(L)M}\subseteq\bar{M}$

⇒ $\theta_i(L)M\subseteq M$

⇒ M 为 $L(\lambda)$ 子模.

由 $L(\lambda)$ 不可约 ⇒ $\tilde{L}(\lambda)$ 不可约.

又∵ $W\Lambda=\Lambda \Rightarrow \Lambda$ 亦为 $\tilde{L}(\lambda)$ 的权集

$\Rightarrow \tilde{L}(\lambda)$ 亦以 λ 为 highest weight.

$\Rightarrow \tilde{L}(\lambda) \cong L(\lambda)$

于是 $\dim L(\lambda)_\mu = \dim \tilde{L}(\lambda)_{s_i\mu} = \dim L(\lambda)_{s_i\mu}$. #

拓展：L为半单Lie代数，V为L模（未必有限）

$\Rightarrow$ V可由 θ_i 构建新的L模结构 $\tilde{V}$

令 $\varphi: V \to \tilde{V}$ 中，则
$v \mapsto \tilde{v}$

(1) φ 建立 $V_\mu \leftrightarrow \tilde{V}_{s_i\mu}$ 双射.

(2) Λ 为 V 的权集 $\Rightarrow s_i\Lambda$ 为 $\tilde{V}$ 的权集

权向量由 φ 建立联系

(3) φ 建立 V 与 $\tilde{V}$ 子模间的一一关系

6、一些补充.

①. 由 $e_i=\frac{1}{2}[h_i,e_i]$, $f_i=-\frac{1}{2}[h_i,f_i]$, $h_i=[e_i,f_i]$

$\Rightarrow L^2=L$，故L上一维表示仅0表示.

②. 第一步中，$f_i^{k_i}v_\lambda=0$, $k_i=\lambda_i(h_i)+1>0$,

严格用到 $\lambda_i(h_i)\geq 0$.

即 $\langle e_i,H,f_i\rangle$-子模的存在性严格用到 $\lambda(h_i)\geq 0$.

$\lambda(h_i)\geq 0 \Rightarrow L(\lambda)$ 由有限 $\langle e_i,H,f_i\rangle$ 子模线性张成

$\Rightarrow s_i\Lambda=\Lambda$，以及 $s_i\Lambda\cap X^+\neq\phi$

$L(\lambda)$ 有限性中，须将 i 遍历 $1\sim l$.

因而严格要求 $\lambda\in X^+$

③. 半单与单

(1) L半单 $\Rightarrow L=\bigoplus_i L_i$ 为单Lie代数分解

$\Rightarrow L_i$ 为不可约 L 模

L_i 作为 H 模 $\Rightarrow$ 权空间分解 $L_i = H_i \oplus \sum_{\alpha\in\Phi_i} e_\alpha$

其中 $\Phi = \bigcup_i \Phi_i$ 为不交并，$\Phi_i \cup \{0\}$ 为 L_i 的权集，

$H = \bigoplus_i H_i$ 为正交分解，$\forall \alpha \in \Phi_i$，$\alpha_i(H_j) = 0$，$j \neq i$

令 λ_i 为 Φ_i 中的 highest weight $\Rightarrow$ $L_i \cong L(\lambda_i)$

(2) V 为不可约 L_i 模，V 可自然视作不可约 L 模.

L 对 V 作用为 $L/L_i^\perp$ 对 V 作用.

(3) L 为单 Lie 代数，亦作为不可约子 L 模

$\Rightarrow$ L 的 cartan 分解即为相应权空间分解.

一般地，一个重要问题是，任给 $\lambda \in X^+$，$L(\lambda)$ 有什么结构

即：$L(\lambda)$ 作为 H 模的权空间分解及权空间维数、

L 对 $L(\lambda)$ 的作用 (可用 e_i, f_i 写出，且 $e_i v_\mu \in L(\lambda)_{\mu+\alpha_i}$)

(4). $w_i \in X^+ \Rightarrow L(w_i)$ 的非零权由 W_{w_i} 构成