Cpt 11. 泛包络的更多性质.

Cpt 11.1 泛包络与对称代数.

recall: T 为 L 上张量代数, J 为 $\{x\otimes y-y\otimes x-[xy]\}$ 生成的 T 子理想

$\Rightarrow \mathcal{U}(L)=T/J$ 为 L 的泛包络代数.

1. 对称代数.

(1). 令 I 为 $\{x\otimes y-y\otimes x \mid x,y\in L\}$ 在 T 上张成的子理想

$\Rightarrow S(L)=T/I$ 称为 L 上对称代数.

(2). $S(L)$ 有空间分解 $S(L)=\bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(L)=\mathbb{C}\cdot 1\oplus L\oplus\sum_{k=2}^{\infty} S^k(L)$

其中, $S^k(L)=T^k+I/I\cong T^k/T^k\cap I$.

记 $K_S^k=T^k\cap I$, 则 $I=\bigoplus_{k=0}^{\infty} K_S^k$ (参见对称代数性质)

(3). $S'(L)$ 与 L 可视为 $S(L)$ 子空间.

note: 不引起歧义下, $\otimes$ 在商下简记.

(4) 设 L 以 $\{x_i\}$ 为基, 则

(1) $S(L)$ 与 $\mathbb{C}[\{x_i\}]$ 代数同构

(2) $S^k(L)$ 以 $\{x_{i_1}\cdots x_{i_k} \mid i_1\le\cdots\le i_k\}$ 为基.

(3) $S(L)$ 以 $\{x_{i_1}\cdots x_{i_k} \mid i_1\le\cdots\le i_k,\ \forall k\}$ 为基.

note: 由pbw基定理 $S(L)$ 与 $\mathcal{U}(L)$ 作为空间同构

2. 设 $\{x_i\}$ 作成 L 的一组基. (未必有限)

下边赋予 $S(L)$, 及 $\mathcal{U}(L)$ 左 L 模结构.

(1). $\forall y\in L$, 令 $y: T\longrightarrow T$

$$x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n}\longmapsto\sum_{k=1}^{n} x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_{k-1}}\otimes[y\,x_{i_k}]\otimes\cdots\otimes x_{i_n}$$

则 T 作成左 L 模

pf: 易见 y 双线性, 只须验证 $[y_1,y_2]$ 作用.

$$[y_1 y_2](x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n})=\sum_{k=1}^{n} x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_{k-1}}\otimes[[y_1,y_2],x_{i_k}]\otimes\cdots\otimes x_{i_n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k-1}} [y_1 [y_2 x_{i_k}]] \otimes \cdots \otimes x_{i_n}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_{k-1}} [y_2 [y_1 x_{i_k}]] \otimes \cdots \otimes x_{i_n}$$

$$= y_1 y_2 (x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}) - y_2 y_1 (x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_n}).$$

共价定义：$\forall y \in L$, $x, z \in T$, $[y, x\otimes z] = [yx]\otimes z + x \otimes [yz]$

（形似 $[y, [xz]] = [[yx], z] + [x, [yz]]$）

Q：F：pbw，verma 模中，包-模定义相似性

② 令 K 为 T 的子理想，且由 X 生成，则 $LX \subseteq K \iff LK \subseteq K$

Pf：由 $x, z \in K \Rightarrow L(x\otimes z) = x\otimes [Lz] + [Lx]\otimes z \in K$ 立见.

③ I, J 为 T 的子 L 模

Pf：I 为 $\{x\otimes z - z\otimes x \mid x, z \in L\}$ 生成的 T 子理想

J 为 $\{x\otimes z - z\otimes x - [xz] \mid x, z \in L\}$ 生成的 T 子理想.

由 $y(x\otimes z - z\otimes x) = [yx]\otimes z - z\otimes [yx]$

$+ (x\otimes [yz] - [yz]\otimes x) \in I$

及 $y(x\otimes z - z\otimes x - [xz]) = [yx]\otimes z - z\otimes [yx] - [z, [yx]]$

$+ (x\otimes [yz] - [yz]\otimes x - [[yz], x]) \in J$

其中 $[y, [xz]] = [z, [yx]] + [[yz], x]$

$\Rightarrow I, J$ 为 T 的子 L 模

推论：$S(L) = T/I$，$\mathcal{U}(L) = T/J$ 均作为 L 模.

④. $LT^k \subseteq T^k \Rightarrow T^k$ 为 T 子 L 模

$\Rightarrow K_S^k = T^k \cap I$ 为 T^k 子 L 模.

$\Rightarrow S^k(L) = T^k / K_S^k$ 为 T^k 商 L 模

$\Rightarrow S(L) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(L)$ 为 L 模直和分解.

3. filtered & graded.

①. 结合代数 A 上，子空间序列 $\{A_i \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$

s.t. $\langle A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots$，则称 A 为 filtered 代数.

$$\begin{cases} \bigcup_i A_i = A \\ A_i \cdot A_j \subseteq A_{ij} \end{cases}$$

② 结合代数 A 上，子空间序列 $\{A_i \mid i\in \mathbb{Z}_+\}$

s.t. $\begin{cases} A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i \\ A_i\cdot A_j \subseteq A_{ij} \end{cases}$，则称 A 为 graded 代数.

③ filtered alg 上自构造 graded alg

Pf: 令 $B_0 = A_0$，$B_i = A_i / A_{i-1}$，$i\geq 1$

令向量空间 $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$，

定义 B 上乘法：$B_i \times B_j \longrightarrow B_{i+j}$

$(x_i + A_{i-1}, x_j + A_{j-1}) \mapsto x_i\cdot x_j + A_{i+j-1}$

$\forall\ x_i' + A_{i-1} = x_i + A_{i-1}$，$x_j' + A_{j-1} = x_j + A_{j-1}$

$\Rightarrow x_i' = x_i + u$，$x_j' = x_j + v$，$u\in A_{i-1}$，$v\in A_{j-1}$

$\Rightarrow x_i'\cdot x_j' - x_i\cdot x_j = uv + u x_j + x_i v \in A_{i+j-1}$

$\Rightarrow x_i'\cdot x_j' + A_{i+j-1} = x_i\cdot x_j + A_{i+j-1}$，即映射良定义

此时，将 B 称为 filtered alg A 关联的 graded alg.

④. 设 $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ 为 filtered alg. TFAE

(1). $A_i\cdot A_j = A_{i+j}$，$\forall\ i,j\geq 1$，(1)': $A_1^n = A_n$.

(2) $A_1\cdot A_i = A_{i+1}$，$\forall\ i\geq 1$

(3). $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 由 A_1 生成

(4). A 由 A_0, A_1 生成 (下列，$A_0 \subseteq A_1$)

Pf: (2) ⇒ (1)：$A_i\cdot A_j = A_1\cdot A_{i-1}\cdot A_j \overset{\text{归纳}}{=} A_1\cdot A_{i+j-1} = A_{i+j}$.

(4) ⇒ (1)：A_2 由 A_0, A_1 生成 ⇒ $A_2 = A_1^2$,

A_3 由 A_0, A_1 生成 ⇒ $A_3 = A_2\cdot A_1 + A_1\cdot A_2 = A_1^3$.

依次下去.

设 $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$ 为 $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ 关联的 graded 代数.

上述命题成立时，$\bigoplus_{i=1} B_i$ 由 B_1 生成

pf: $B_1 \cdot B_i = (A_1/A_0)\cdot(A_i/A_{i-1}) = (A_i \cdot A_i)/A_i = A_{i+1}/A_i = B_{i+1}$ #

4. $U(L)$ 与 $S(L)$ 关系及性质

(1). 令 $U_k(L) = \mathrm{span}\{a_1\cdots a_j \mid 0\le j\le k,\ a_i\in L\} = (\bigoplus_{i=0}^{k} T^i + J)/J$

$\Rightarrow U_k(L)$ 作成 L 子模，以 $\{x_{i_1}\cdots x_{i_j} \mid 0\le j\le k,\ i_1\le\cdots\le i_j\}$ 为基

且 $\{U_k(L)\}_{k=0}^{\infty}$ s.t. $U(L)$ 作成 filtered alg.

note: $j=0$ 时，记 $a_1\cdots a_j = 1$

(2) $U(L)$ 关联的 graded 代数与 $S(L)$ 代数同构

pf: 1. 令 $B_0 = U_0(L)$，$B_k(L) = U_k(L)/U_{k-1}(L)$，$k\ge 1$

$B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i$ 作成代数，乘法：$B_i \times B_j \longrightarrow B_{i+j}$

$(x_i + U_{i-1}(L),\ x_j + U_{j-1}(L)) \longmapsto x_i x_j + U_{i+j-1}(L)$

$L \xrightarrow{\sim} U_1(L)/U_0(L)$ 为向量空间同构 $\Rightarrow B_1$ 可在 L 上取代表元

$x \longmapsto x + U_0(L)$

$\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in B_1$，$\bar{x}\cdot\bar{y} - \bar{y}\cdot\bar{x} = (xy + U_1(L)) - (yx + U_1(L))$

$= [xy] + U_1(L)$

$= U_1(L) = \bar{0}$

即 $\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$，又 $U(L)$ 由 $L, 1$ 生成

$\Rightarrow B$ 由 B_1, B_0 生成，于是 B 作成交换代数

II 由 pbw 基定理，$U_k(L)$ 以 $\{x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n} \mid r_1+\cdots+r_n \le k\}$ 为基

归纳易证 $U_k(L)/U_{k-1}(L)$ 以 $\{x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n} + U_{k-1}(L) \mid r_1+\cdots+r_n = k\}$ 为基

$S_k(L)$ 以 $\{x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n} \mid r_1+\cdots+r_n = k\}$ 为基且为交换代数

$\Rightarrow \varphi_i: S_i(L) \to B_i$ 作成代数同构

$x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n} \longmapsto x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n} + U_{i-1}(L)$

(3). 对称群 S_n 关于 $\sigma: T^n \to T^n$ 作用在 T^i 上.

$y_1\otimes\cdots\otimes y_n \longmapsto y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}$

令 $T^n_{sym} = \text{span}\{y_1\otimes\cdots\otimes y_n \in T^n \mid \sigma(y_1\otimes\cdots\otimes y_n) = y_1\otimes\cdots\otimes y_n,\ \forall \sigma\in S_n\}$

并称 T^n_{sym} 为 T^n 上的对称张量积

(4) 对 $\varphi: T \to \mathcal{U}(L)$, $\ker\varphi = J$

$\Rightarrow \varphi|_{T^n}: T^n \to \mathcal{U}_n(L)$, $\ker\varphi|_{T^n} = T^n\cap J$ 为 L 模

$\Rightarrow \varphi|_{T^n_{sym}}: T^n_{sym} \to \mathcal{U}_n(L)$. $\ker\varphi|_{T^n_{sym}} = T^n_{sym}\cap J$

记 $\mathcal{U}^n(L) = \varphi(T^n_{sym})$,

PROP: (1). $\mathcal{U}_i(L) = \mathcal{U}_{i-1}(L)\oplus \mathcal{U}^i(L)$

(2) $\mathcal{U}^i(L)$ 作成 $\mathcal{U}_i(L)$ 子 L 模.

pf: (1) 1. 先证 $\mathcal{U}_i(L) = \mathcal{U}_{i-1}(L) + \mathcal{U}^i(L)$

$\mathcal{U}_n(L)$ 以 $\{x_{i_1}\cdots x_{i_k} \mid i_1\le\cdots\le i_k,\ 0\le k\le n\}$ 为基.

$\mathcal{U}(L)$ 关联的graded代数为交换代数

$\Rightarrow x_{i_1}\cdots x_{i_n} = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) + u$, $\supseteq$ ✿

其中 $\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) \in \mathcal{U}^n(L)$, $u\in\mathcal{U}_{n-1}(L)$

$\Rightarrow \mathcal{U}_i(L) = \mathcal{U}_{i-1}(L) + \mathcal{U}^i(L)$

P 2. $\forall\ x = \sum_{i_1\le\cdots\le i_n}\lambda_{i_1\cdots i_n}\cdot\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) \in \mathcal{U}^n(L)\cap\mathcal{U}_{n-1}(L)$

note2

$\Rightarrow n!\left(\sum_{i_1\le\cdots\le i_n}\lambda_{i_1\cdots i_n}\cdot x_{i_1}\cdots x_{i_n}\right) + u \in \mathcal{U}^n(L)\cap\mathcal{U}_{n-1}(L)$

$\Rightarrow \sum_{i_1\le\cdots\le i_n}\lambda_{i_1\cdots i_n}\cdot(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) \in \mathcal{U}_{n-1}(L)$

$\Rightarrow \lambda_{i_1\cdots i_n} = 0,\ \forall\ i_1\le\cdots\le i_n$

$\Rightarrow x = 0$, 即 $\mathcal{U}^n(L)\cap\mathcal{U}_{n-1}(L) = 0$.

(2). 由 $[y, \sigma(x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n})] = \sigma[y, x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n}]$

$\Rightarrow T^n_{sym}$ 作成 L 模.

$\Rightarrow \mathcal{U}^n(L) = T^n_{sym}/(T^n_{sym}\cap J)$ 作成 L 模

(主义自己)

note: $\sigma(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) := \sigma(x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n} + J) = (\sigma x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n}) + J$. 且与Lie作用交换

note2: $T^n_{sym} = \text{span}\{\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n})\}$

note3: 由 $\mathcal{U}_n(L)$ 基 $\Rightarrow \mathcal{U}^n(L)$ 以 $\{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\cdots x_{i_n})\}$ 为基. (由作数导出)

⑤. 存在同构交换图.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}^n(L) \arrow[dr, "\gamma"] & \\ T^n_{sym} \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \mathcal{U}_n(L)/\mathcal{U}_{n-1}(L) \\ & S^n(L) \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

其中 α 为 $T \to \mathcal{U}(L)$ 在 T^n_{sym} 上限制

β 为 $T \to S(L)$ 在 T^n_{sym} 上限制

γ 由 $\mathcal{U}_n(L) = \mathcal{U}^n(L) \oplus \mathcal{U}_{n-1}(L) \to \mathcal{U}_n(L)/\mathcal{U}_{n-1}(L)$ 诱导.

$(\mathcal{U}_{-1}(L)=0)$

δ 为 $S(L) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{U}_i(L)/\mathcal{U}_{i-1}(L)$ 在 $S^n(L)$ 上限制

pf: T^n_{sym} 以 $\{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n}) \mid i_1\le\cdots\le i_n\}$ 为基.

$\mathcal{U}^n(L)$ 以 $\{\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1},\cdots x_{i_n}) \mid i_1\le\cdots\le i_n\}$ 为基

$S^n(L)$ 以 $\{x_{i_1}\cdots x_{i_n} \mid i_1\le\cdots\le i_n\}$ 为基 (对称代数)

$\mathcal{U}_n(L)/\mathcal{U}_{n-1}(L)$ 以 $\{x_{i_1}\cdots x_{i_n}+\mathcal{U}_{n-1}(L) \mid i_1\le\cdots\le i_n\}$ 为基. (前边已证)

$\Rightarrow$ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 均作成空间同构.

$\gamma\circ\alpha\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n})\right) = \gamma\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\cdots x_{i_n})\right) = x_{i_1}\cdots x_{i_n}+\mathcal{U}_{n-1}(L)$

$\delta\circ\beta\left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n})\right) = \delta(x_{i_1}\cdots x_{i_n}) = x_{i_1}\cdots x_{i_n}+\mathcal{U}_{n-1}(L)$

⑥. 令 $\theta=\gamma^{-1}\delta$: $S^n(L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}^n(L)$ 为空间同构

由 $S(L)=\bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(L)$, $\mathcal{U}(L)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{U}^n(L)$ 延拓

$\Rightarrow$ $\theta: S(L) \to \mathcal{U}(L)$ 为 L 模同构,

$x_{i_1}\cdots x_{i_n} \mapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sigma(x_{i_1}\cdots x_{i_n})$

pf: 只须 check. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为模同构.

另: A 为结合代数, 若 $D: A\to A$ s.t. $D(a\cdot b)=D(a)\cdot b + a\cdot D(b)$

则称 D 为导子.

若 A 由 X 代数生成, 则 D 在 X 上作用可唯一确定 D 在 A 上作用

以上. 本书结构紊乱 参见整理内容

Cpt11.2 多项式函数

1. 令 $G=\mathrm{Inn}L$ 作用在 L 上，则 G 可自然作用在 L^* 上

即：$\forall g\in G,\ f\in L^*,\ x\in L$

$\overset{t^*}{g}f(x)\quad \langle \overset{t^*}{g}f, x\rangle_\pi = \langle f, g^{-1}(x)\rangle_\pi = f(g^{-1}(x))$

note: $\langle , \rangle_\pi$ 为 L 的对偶对，t^* 为 逆转置作用

2. 相关构造

①. 令 $T(L^*)$ 为 L^* 的张量代数，$T(L^*)$ 如下作成 G 模

$g:\ T(L^*)\to T(L^*)$

$f_1\otimes\cdots\otimes f_k\mapsto gf_1\otimes\cdots\otimes gf_k$

note: G-模 $\Leftrightarrow$ G 作用 + 保加法

② $I(L^*)$ 为 $\{f\otimes g-g\otimes f\mid f,g\in L^*\}$ 生成的 $T(L^*)$ 子理想

$S(L^*)=T(L^*)/I(L^*)$ 为 L^* 的对称代数

$I(L^*)$ 为 $T(L^*)$ 的 G 子模 $\Rightarrow$ $S(L^*)$ 亦为 G 模

note: $f_1\otimes\cdots\otimes f_k+I\in S(L^*)$ 定义了 L 上的多项式函数

即 $f_1\otimes\cdots\otimes f_k:\ L\to C$

$x\mapsto f_1(x)\cdots f_k(x)$

③. 令 $P(L)=S(L^*)$，$P^m(L)=S^m(L^*)=T^m(L^*)+I/I$

$\Rightarrow P^k(L)$ 由 L 上 k 次齐次多项式构成

$P^1(L)=L^*$

由 $T^m(L^*)$ 作成 G 模 $\Rightarrow$ $P^m(L^*)$ 作成 G 模

note: 设 $L=\mathrm{span}\{x_i\}$，$f\in L^*\Rightarrow f$ 为关于 $\{x_i\}$ 的线性函数

$\Rightarrow \prod f_i$ 为关于 $\{x_i\}$ 的多项式函数

3. 下边理解 G 在 $P(L)$ 上的作用

① 令 $V_m=T^m(L^*)=\mathrm{span}\{f_1\otimes\cdots\otimes f_m\mid f_i\in L^*\}$

$W_m=T^m(L)=\mathrm{span}\{x_1\otimes\cdots\otimes x_m\mid x_i\in L\}$

令 $\alpha: V_m \longrightarrow W_m^*$

$$f_1\otimes\cdots\otimes f_m \longmapsto \alpha(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)\left(\begin{matrix} W_m \longrightarrow \mathbb{C} \\ x_1\otimes\cdots\otimes x_m \longmapsto f_1(x_1)\cdots f_m(x_m)\end{matrix}\right)$$

则 α 作成 G 模同构

note: G 在 L 上作用诱导了 G 在 L^*, $T(L)$, $T(L^*)$, $T^m(L)$, $T^m(L^*)$, 从而 $T^m(L)^*$, $T^m(L^*)^*$ 上作用　（不平凡，参看 hopf）

pf: $\because$ $\alpha(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)=0 \Leftrightarrow f_1(x_1)\cdots\cdots f_m(x_m)=0,\ \forall x_i\in L$

$\Leftrightarrow f_i=0,\ \exists i$

$\Leftrightarrow f_1\otimes\cdots\otimes f_m=0$

$\therefore$ α 为单射，又 $\dim V_m=\dim W_m^*=n\cdot m$

$\therefore$ α 为双射. 下证 α 为 G 模同态

$\forall g\in G$, $\alpha(g(f_1\otimes\cdots\otimes f_m))(x_1\otimes\cdots\otimes x_m)$

$= f_1(g^{-1}(x_1))\cdot f_2(g^{-1}(x_1))\cdots\cdots f_m(g^{-1}(x_1))$

又 $g\cdot(\alpha(f_1\otimes\cdots\otimes f_m))(x_1\otimes\cdots\otimes x_m)$

$=\alpha(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)(g^{-1}(x_1\otimes\cdots\otimes x_m))$

$=\alpha(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)(g^{-1}(x_1)\otimes\cdots\otimes g^{-1}(x_m))$ 与上式相等

$\therefore$ α, g 作用可交换

note: g 在 $T^m(L)^*$ 上作用为 $g(F)(x_1\otimes\cdots\otimes x_m)=F(g^{-1}(x_1\otimes\cdots\otimes x_m))$

☆ note2: $m=1$ 时, $\alpha: L^*\xrightarrow{\sim} L^*$ 为恒等映射

$T^m(L)^*$ 先张量，再对偶,
$T^m(L^*)$ 先对偶，再张量
$\xrightarrow{\alpha}$ G 在二者上有相等作用

note3: 求 α^{-1} 方法: 对 $f\in T^m(L)^*$, 令 $f_i=f(1\otimes\cdots\otimes \overset{(i)}{x}\otimes\cdots\otimes 1)$

则 $\alpha^{-1}(f)=f_1\otimes\cdots\otimes f_m$

②. 考虑 $T^m(L)^*\xrightarrow{\alpha^{-1}} T^m(L^*)\xrightarrow{\beta} S^m(L^*)$, 令 $\theta=\beta\cdot\alpha^{-1}$ 为 G 模同态

即 $\theta: T^m(L)^*\longrightarrow S^m(L^*)$, 则 $\theta f(x)=f(x\otimes\cdots\otimes x)$

$f\longmapsto \theta f$

Pf: 由线性性, 只须讨论 $\alpha^{-1}(f)=f_1\otimes\cdots\otimes f_m$ 的情形

此时 $\theta f(x)=f_1\otimes\cdots\otimes f_m(x)$

$=f_1(x)\cdot\cdots\cdot f_m(x)$

$=\alpha(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)(x\otimes\cdots\otimes x)$

$=f(x\otimes\cdots\otimes x)$

note: $T^m(L)^*$ 由 $T^m(L)$ 上线性函数构成

$S^m(L^*)$ 为多项式函数.

θ 将二者建立关系.

③ 令 $T^m(L)^*_{sym}=\{f\in T^m(L)^*\mid f(x_1\otimes\cdots\otimes x_m)=f(x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(m)}),\ \forall\sigma, x_i\}$

$T^m(L^*)_{sym}=\{f_1\otimes\cdots\otimes f_m\mid f_i\in L^*, f_1\otimes\cdots\otimes f_m=f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(m)}, \forall\sigma\}$

则 $T^m(L)^*_{sym}\xrightarrow{\alpha^{-1}}T^m(L^*)_{sym}\xrightarrow{\beta}S^m(L^*)$ 作成 G 模同构

Pf: (1) 类似上节 T^n_{sym} 为 L 模证明 (σ 与 L 作用交换)

易见 σ 与 G 在 $T^m(L)^*$, $T^m(L^*)$ 上作用交换

$\Rightarrow T^m(L)^*_{sym}$, $T^m(L^*)_{sym}$ 作成 G 子模

(2) 验证 $\alpha(T^m(L^*)_{sym})\subseteq T^m(L)^*_{sym}\overset{\text{维数}}{\Longrightarrow}\alpha^{-1}$ 诱导同构

(3) 验证 β 满射 $\overset{\text{维数}}{\Longrightarrow}$ β 诱导同构. #

note: $T^m(L)^*$ 为 $T^m(L)$ 上线性函数

$T^m(L^*)$ 由 $f_i\in L^*$ 张量得到

$S^m(L^*)$ 由 $f_i\in L^*$ 乘积得到 (或看成 L 上多项式)

二者抽象意义不同.

借由同构关系 θ 将 G 作用转移到合适的框架上研究

note2: 类比上节得到 $T^n_{sym}\cong\mathcal{U}^n(L)\cong S^n(L)\cong\mathcal{U}_n(L)/\mathcal{U}_{n-1}(L)$

$T=T_{sym}\oplus J$, $T^n=T^n_{sym}\oplus K^n_s$, $\mathcal{U}_n=\mathcal{U}^n\oplus\mathcal{U}_{n-1}$ 为 L 模分解

现: $T^m(L^*)_{sym}\cong T^m(L)^*_{sym}\cong S^m(L^*)$,

$T^m(L^*)=T^m(L^*)_{sym}\oplus K^{m*}_s$ 为 G 模分解

补：$S^m(L^*)$ 由 $f_1\cdots f_m$ 构成，

$P^m(L)$ 由 L 上 m 次多项式构成

令 $f_1\cdots f_m(x) = f_1(x)\cdots f_m(x)$ 即得 $f_1\cdots f_m$ 作为多项式的定义

下设 L 为半单李代数. $G = \mathrm{Im}\, L$ 称为 L 的伴随群 (adjoint)

4. 群-不变代数

① $P(L)^G = \{ p\in P(L) \mid gp = p,\ \forall g\in G\}$ 作成 $P(L)$ 子代数

$P(L)^G$ 中元素称为 G-不变的

② 设 H 为 L 的 Cartan 子代数，W 为 L 的 Weyl 群

令 $P(H) = S(H^*)$ 为 H 上多项式构成的代数

类似前面讨论 $\Rightarrow H, H^*, T(H^*), S(H^*)$ 作成 W-模

令 $P(H)^W = \{ p\in P(H) \mid wp = p,\ \forall w\in W\}$ 作成 $P(H)$ 子代数

$P(H)^W$ 中元素称为 W-不变的

note: $P(L) = S(L^*)$ 由 $f_1\cdots f_m$ 生成，$\forall f_i\in L^*$, $m\in\mathbb{Z}_+$

$g\in G$, $p\in P(L) \Rightarrow gp = g(f_1\cdots f_n) = f_1 g^{-1}\cdot\cdots\cdot f_m g^{-1}$

$\Rightarrow gp(x) = p(g^{-1}(x))$

现 $p\in P(L)^G \Leftrightarrow G.p \equiv p$

$\Leftrightarrow p(G.x) \equiv p(x)$, $\forall x\in L$

即 $p\in P(L)^G \Leftrightarrow p$ 对 L 内自同构像作用相同.

5. $P(L)^G$ 与 $P(H)^W$ 关系

① 令 $\psi: P(L) \to P(H)$ 为代数同态

$f \mapsto f|_H$

则 $\psi(P(L)^G) \subseteq P(H)^W$

Pf: $\forall p\in P(L)^G$,

令 $\theta_i = e^{\mathrm{ad}\, e_i}\cdot e^{\mathrm{ad}\, f_i}\cdot e^{\mathrm{ad}\, e_i} \Rightarrow \theta_i|_H = s_i$

$\theta_i p = p \Rightarrow s_i(\psi(p)) = \psi(p)$

由 σ_i 任意性 $\Rightarrow W.\varphi(p) = \langle\{s_i\}\rangle.\varphi(p) = \varphi(p)$

$\therefore \varphi(p) \in P(H)^W$ #

② 下证 $\varphi: P(L)^G \to P(H)^W$ 为单射

pf: 令 R 为 L 的正则点集 $\Rightarrow \exists x_0 \in R$ s.t. $H = L_{0,x_0}$

由 H 共轭唯一性 $\Rightarrow \forall x \in R\ \exists g \in G$ s.t. $g(x) \in H$

现设 $\varphi(P) = 0 \Rightarrow 0 = P(g(x)) = g^{-1}P(x) = P(x),\ \forall x \in R$

$\Rightarrow P(R) = 0$

即 P 零化正则点集

由代数不等式的无关性原理 $\Rightarrow P \equiv 0$

注: Weyl's principle of irrelevance of algebraic inequalities

$n, m \in \mathbb{Z}_+$, $P = K[x_1, \cdots, x_n]$ 为多项式环

$F, R_1, R_2, \cdots, R_m \in P$ s.t. $R_1, \cdots, R_m$ 非零

若 F 零化 $\{x = (a_1, \cdots, a_m) \mid R_i(x) \neq 0, \forall i\}$

则 $F = 0$.

特别地，正则点集 R 为某个构造多项式的非零点集，因而 $P = 0$

③ 最后，证 $\varphi: P(L)^G \twoheadrightarrow P(H)^W$，继而二者同构

Pf: 简化

(1) 令 $\lambda \in X^+ \subseteq H^*$ 为主整权

$L(\lambda) = \bigoplus_\mu L(\lambda)_\mu$ 为关于 H 模的权空间分解，取权基

其诱导表示 $\rho: L \to gl(L(\lambda))$

(2) 考虑 $P: L \to \mathbb{C}$

$x \mapsto tr(\rho(x)^m)$

验证略去.

$\Rightarrow P \in P^m(L)$ (ρ 线性性，tr 线性性 $\Rightarrow P$ 为 m 次多项式)

且 $P \in P^m(L)^G$ $\left(\text{令 } \begin{matrix} P^m(L) \to T^m(L)^*_{sym} \\ P \to f \end{matrix},\ 先证 L.f = 0,\ e^{ad\,x} f = f,\ \forall ad\,x \text{ 幂零} \right.$

$\left. \Rightarrow f \in (T^m(L)^*_{sym})^G \quad \# \right)$

(3) 设 $L(\lambda)$ 权集为 $\{\lambda_1=\lambda, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$

$\Rightarrow \rho(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k(x) \end{pmatrix}, \ \forall x \in H^*$

$\Rightarrow P(x) = tr(\rho(x)^m) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x)^m$

(4) H^* 由基本根 $\{w_i\}$ 张成 $\Rightarrow$ H^* 由整权格 X 张成

$\Rightarrow P^m(H) = span\{\lambda_1 \cdots \lambda_m \mid \lambda_i \in X\}$

利用 polarisation 技巧，例 $\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)^2 - \frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$

$\Rightarrow P^m(H) = span\{\lambda^m \mid \lambda \in X\}$

$\Rightarrow P^m(H)^W = span\{\sum_{w\in W} w(\lambda)^m \mid \lambda \in X\}$ $(w(\lambda)^m = w(\lambda^m))$

$= span\{\sum_{w\in W} w(\lambda)^m \mid \lambda \in X^+\}$

又 $L(\lambda)$, m 诱导的 $P = \lambda_1^m + \cdots + \lambda_k^m$

$= \lambda^m +$ 关于偏序"<"小于 λ 的权乘积

由 $P \in P^m(H)^W \Rightarrow P = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w\lambda^m +$ 小偏序项，归纳得证

梳理：① $\forall \lambda \in X^+, m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \rho: L \to gl(L(\lambda))$

$\Rightarrow P: L \to C$

$x \mapsto tr(\rho(x)^m)$

$\Rightarrow P \in P^m(L)^G$

存像在 $P^m(L)^G$ 上

② 令 $L(\lambda)$ 权集为 $\{\lambda_1=\lambda, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$

$\Rightarrow \rho(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k(x) \end{pmatrix}, \ x \in H$

$\Rightarrow P = \lambda_1^m + \cdots + \lambda_k^m$

③ $H^* = span\{w_i\} = span\{X\}$

$\Rightarrow P^m(H) = span\{\lambda_1 \cdots \lambda_m \mid \lambda_i \in X\}$

$= span\{\lambda^m \mid \lambda \in X\}$

$\Rightarrow P^m(H)^W = span\{\sum_{w\in W} w\lambda^m \mid \lambda \in X\}$

$= span\{\sum_{w\in W} w\lambda^m \mid \lambda \in X^+\}$

归纳 $\Rightarrow \{P(\lambda, m)|_H \mid \lambda \in X^+, m \in \mathbb{Z}_+\}$ 张成 $P^m(H)^W$

note: $P(H)^W = (\bigoplus_{m=0}^{\infty} P^m(H))^W = \bigoplus_{m=0}^{\infty} (P^m(H)^W)$

小结：定义 G 模 $L, L^*, T(L^*), T(L)^*, S(L^*)=P(L^*)$,

$T^m(L^*), T^m(L)^*, S^m(L^*), T^m(L)^*_{sym}, T^m(L^*)_{sym}$

得同构关系：$T^m(L)^* \cong T^m(L^*)$

$T^m(L)^*_{sym} \cong T^m(L^*)_{sym} \cong S^m(L^*)$

证明关系：$P(L)^G \cong P(H)^W$

Cpt11.3. $P(H)^W$ 的结构

1. 讨论基础

① 令 $I = P(H)^W$, $\theta: P(H) \to P(H)$

$$P \mapsto \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w(P)$$

则 $\theta(P(H)) \subseteq I$ 且 $\theta^2 = \theta$

note: w 与代数乘法可交换 $\Rightarrow$ θ 为代数同态

② 令 $P(H)^+ = \bigoplus_{m=1}^{\infty} P^m(H)$, $I^+ = I \cap P(H)^+$

则 $P(H)I^+ = I^+ \cdot P(H)$ 为 I^+ 生成的 $P(H)$ 理想

2、若干引理.

①. (1) 若 $\{J_i\}_{i=1}^{k} \subseteq I$ s.t. $J_1 \notin I\cdot\{J_2,\cdots,J_k\}$

则 $J_1 \notin P(H)\cdot\{J_2,\cdots,J_k\}$

(2) 若 $\{P_i\}_{i=1}^{k} \subseteq P(H)$ s.t. P_i 齐次且 $\sum_{i=1}^{k} P_iJ_i = 0$,

则 $P_1 \in P(H)I^+$

Pf: (1) 反设 $J_1 = Q_2J_2+\cdots+Q_kJ_k$, $Q_i \in P(H)$

$\Rightarrow J_1 = \theta J_1 = \theta(Q_2)J_2+\cdots+\theta(Q_k)J_k$ 矛

(2) $\theta(P_1) \in I^+$, 否则 $\theta(P_1)$ 为非零常数, 与 $J_1 \notin P(H)\cdot\{J_2,\cdots,J_k\}$ 矛

只须证 $\theta(P_1) - P_1 \in P(H)I^+$

对 P_1 次数归纳, 不妨设 $\deg P_1 > 0$ (参见 P417-P418, 不难证明)

② I^+ 由齐次元素张成

$\Rightarrow P(H)I^+$ 为 I 中齐次元生成的 $P(H)$ 子理想

$P(H)$ 为 $\mathbb{C}$ 上多项式环 $\Rightarrow$ $P(H)$ 诺特,

由 Hilbert's 基定理, $P(H)\cdot I^+$ 有限生成

Prop: 设齐次元 $\{I_1,\cdots,I_n\}\subseteq I$ 生成 $P(H)\cdot I^+$

且 $I_k\notin P(H)\cdot\{I_i,\ i\neq k\}$ 则 $\{I_1,\cdots,I_n\}$ 代数无关。

note: 即对任一多项式 P, $P(I_1,\cdots,I_n)=0 \Rightarrow P=0$

参见 P19 – P20

③. $I=\{Q(I_1,\cdots,I_n)\mid Q\in\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]\}$

pf: 只须验证 I 的齐次元素

$\forall J\in I$, 对 $\deg J$ 归纳,

$\deg J=0$ 时显然, 下设 $\deg J>0$

$J\in I^+\subseteq P(H)I^+ \Rightarrow J=P_1I_1+\cdots+P_nI_n$, 不妨设 P_i 齐次

$\{I_i\}$ 齐次 $\Rightarrow \deg P_i=\deg J-\deg I_i$

$\Rightarrow J=\theta(P_1)I_1+\cdots+\theta(P_n)I_n$,

其中 $\theta(P_i)\in I$ 且次数小于 J. #

3. 推论: $P(H)^W=\mathbb{C}[I_1,\cdots I_n]\cong\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$

note: $\{I_i\}$ 代数无关 $\Rightarrow \mathbb{C}[I_1,\cdots I_n]\cong\mathbb{C}[x_1,\cdots x_n]$

pf: $\varphi: \mathbb{C}[x_1,\cdots x_n]\to\mathbb{C}[I_1,\cdots I_n]$ 作成满同态

代数无关性 $\Rightarrow \varphi$ 为单同态

Prop: 称 $\{I_i\}_{i=1}^n$ 为 W 的基本不变多项式.

则 $n=l=\dim H$

pf: 用到代 Λ transcendence degree 性质

参见 P21

note: $\{I_i\}_{i=1}^n$ 通过 Hilbert's 基定理确定, 选取不唯一, 但数量确定

4. 设 $\{I_1,\cdots,I_l\}$, $\{I_1',\cdots,I_l'\}\subseteq P(H)$ 为两组基本不变多项式

则可通过调整次序，s.t. $\deg I_i = \deg I_i'$

参见 P222.

5. 综上讨论，(1) $P(H)^W \cong \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_l]$

(2) $P(H)^W = \mathbb{C}[I_1,\cdots,I_l]$，$\{I_i\}_{i=1}^{l} \subseteq I^+$ 由齐次元构成，

(3) 令 $\deg I_i = d_i$，则 $\{d_i\}$ 与 $\{I_i\}$ 选取无关

补：$P(H)^W = \left(\bigoplus_{m=0}^{\infty} P^m(H)\right)^W = \bigoplus_{m=0}^{\infty}\left(P^m(H)^W\right)$

Pf: 易见 $\bigoplus_{m=0}^{\infty}\left(P^m(H)^W\right) \subseteq \left(\bigoplus_{m=0}^{\infty} P^m(H)\right)^W$

$\forall\ P = P_1 + \cdots + P_k \in P(H)^W$，其中 P_i 齐次 且 $\deg P_i < \deg P_{i+1}$

$\forall w \in W$，$P_k(wx) - P_k(x) = -\left(\sum_{i=1}^{k-1} P_i(wx) - P_i(x)\right)$，$\forall x \in H$

右侧多项式次数小于左侧 $\Rightarrow P_k(wx) - P_k(x) \equiv 0$，$\forall x \in H$

即 $w^{-1}P_k = P_k$，由 w 任意性，$P_k \in P(H)^W$. 归纳 #

小结

① $I = P(H)^W$，$P(H)^+ = \bigoplus_{m=1}^{\infty} P^m(H)$，$I^+ = I \cap P(H)^+$

Hilbert's 基定理 $\Rightarrow P(H)I^+$ 有限生成

$\Rightarrow P(H)I^+ = P(H)\{J_1,\cdots J_k\}$，$J_i \in I^+$

I^+ 由齐次元生成 $\Rightarrow P(H)I^+ = P(H)\cdot\{I_1,\cdots I_n\}$，$I_i \in I^+$ 齐次，并取极小

② $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ 代数无关，且 $I = \mathbb{C}[I_1,\cdots,I_n]$，$n = l = \dim H$

③. $\{\deg I_i\}$ 与 $\{I_i\}$ 选取无关

Cpt 11.4. Killing 同构. $\to S(L^*)^G$ $\to S(H^*)^W$

前边2节讨论了 $P(L)^G$ 与 $P(H)^W$ 的关系及结构，

本节讨论这两个代数与 $S(L)^G$，$S(H)^W$ 的关系

1. G模

① $G = \mathrm{Inn}\,L$ 作用在 L 上 $\Rightarrow G$ 作用在 $T(L)$，$S(L)$ 上

② $S(L)^G$ 由 $S(L)$ 中 G-不变元构成，作成 $S(L)$ 子代数，且为 G 模

2. Killing 映射

① Killing 型 $\langle , \rangle$ 为 L 上非退化双线性型

$\Rightarrow \langle , \rangle$ 诱导双射 $\varphi: L \to L^*$，且 φ 作成 G 模同态

Pf: 由 G 由 $\{e^{ad z} \mid z \in L$ 幂零$\}$ 生成，只须证 $\varphi \circ e^{ad z} = e^{ad z} \circ \varphi$

即证 $\forall x, y \in L$，$\varphi(e^{ad z} . x)(y) = e^{ad z} . \varphi(x)(y)$

即 $\langle e^{ad z}. x, y \rangle = \langle x, e^{ad -z}. y \rangle$

由 $\langle , \rangle$ 不变性 $\Rightarrow \langle [z, x], y \rangle = \langle x, [-z, y] \rangle$

$\Rightarrow \langle ad z . x, y \rangle = \langle x, ad{-z}. y \rangle$

$\Rightarrow \langle ad^2 z . x, y \rangle = \langle ad z . x, ad{-z}. y \rangle$

$= \langle x, (ad{-z})^2 . y \rangle$

归纳 $\Rightarrow \langle ad^n z . x, y \rangle = \langle x, (ad{-z})^n y \rangle$

再由 $e^{ad z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ad z)^k}{k!}$ 得证.

指出：$\langle g.x, g.y \rangle = \langle x, y \rangle$，$\forall x, y \in L$，$g \in G$

② 同构 $L \xrightarrow{\sim} L^*$ 诱导同构 $^{(1)} T(L) \xrightarrow{\sim} T(L^*)$

(代数同构 $^{(2)} S(L) \xrightarrow{\sim} S(L^*) = P(L)$

+G模同构) $^{(3)} S(L)^G \xrightarrow{\sim} S(L^*)^G = P(L)^G$

③ $\langle , \rangle$ 在 H 上限制诱导双射 $\varphi: H \to H^*$

$h \mapsto \langle h, - \rangle$

则 φ 作成 W-模同构

Pf: 此处利用 W 正交性质 参见 Cpt7.

类似地，同构 $H \xrightarrow{\sim} H^*$ 诱导 $^{(1)} T(H) \xrightarrow{\sim} T(H^*)$

(代数同构 $^{(2)} S(H) \xrightarrow{\sim} S(H^*) = P(H)$

+W模同构) $^{(3)} S(H)^W \xrightarrow{\sim} S(H^*)^W = P(H)^W$

3. $S(L)$ 与 $S(H)$ 关系

① recall: $L \hookrightarrow S(L)$ 且有三角分解 $L = N^- \oplus H \oplus N$

令 $K = S(L).(N\cup N^-)$ 为 N, N^- 生成的 $S(L)$ 理想

$\Rightarrow \eta: S(L)/K \xrightarrow{\sim} S(H)$ 作为代数同构

$h+K \mapsto h$ ($\mathcal{U}(L) = \mathcal{U}(B)\cdot\mathcal{U}(N^-) = \mathcal{U}(L)\cdot\beta \oplus \mathcal{U}(N^-)$) 见习题

② 有下边交换图，

$$\begin{array}{ccc} S(L) & \xrightarrow{\alpha} & P(L) \\ \eta\downarrow & & \downarrow\psi \\ S(H) & \xrightarrow[\beta]{} & P(H) \end{array}$$

其中 α 为代数同构和 G-模同构

β 为代数同构和 W-模同构

ψ 由限制得到为代数同态

η 为商同态，为代数同态

pf: 即证交换性，$\psi\circ\alpha = \beta\circ\eta$

$\forall\ Q = f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N}\cdot h_1^{s_1}\cdots h_l^{s_l}\cdot e_{\beta_1}^{t_1}\cdots e_{\beta_N}^{t_N} \in S(L)$

若 $r_i = t_i \equiv 0,\ \forall i$，则 $\beta(\eta(Q)) = \beta(Q) = h_1^{*s_1}\cdots h_l^{*s_l} = \psi(\alpha(Q))$

若 r_i, t_i 不恒为 0，则 $\beta(\eta(Q)) = 0$,

由 $\langle N^-, H\rangle = \langle N, H\rangle = 0$，得 $\psi(\alpha(Q)) = 0$. #

推论:
$$\begin{array}{ccc} S(L)^G & \xrightarrow{\alpha} & P(L)^G \\ \eta\downarrow & & \downarrow\psi \\ S(H)^W & \xrightarrow{\beta} & P(H)^W \end{array}$$
作成同构交换图

pf: α, β, ψ 同构，且图交换，#

已知，$S(L)^G$, $P(L)^G$, $S(H)^W$, $P(H)^W$ 均同构于 $\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_l]$

小结

① L, $T(L)$, $S(L)$ 作成 G 模

② $\langle , \rangle$ 诱导 $L \to L^*$ G模同构

$x \mapsto \langle x, -\rangle$

$\Rightarrow \langle , \rangle$ 诱导 $T(L) \to T(L^*)$ 为代数同构且 G-模同构

$x_1\otimes\cdots\otimes x_n \mapsto \langle x_1,-\rangle\otimes\cdots\otimes\langle x_n,-\rangle$

继而得到 $S(L) \xrightarrow{\sim} S(L^*) = P(L)$

$S(L)^G \cong S(L^*)^G = P(L)^G$

$\langle , \rangle$ 限制在 H 上得类似结论

③ 交换图

$$\begin{array}{ccc} S(L) & \xrightarrow{\alpha} & P(L) \\ \eta\downarrow & & \downarrow\varphi \\ S(H) & \xrightarrow[\beta]{} & P(H) \end{array}$$

其中 $\alpha: S(L) \to P(L)$ 为 G 模同构且代数同构

$x_1\cdots x_m \mapsto x_1^*\cdots x_m^*$，$x_i^* = \langle x_i,-\rangle$

β 与 α 类似

$\varphi: P(L) \to P(H)$ 由限制诱导

$p \mapsto p|_H$

$\eta: S(L) \to S(L)/K \cong S(H)$

$x \mapsto x+K$，K 由 N, N^- 生成

Cpt11.5 泛包络的中心

令 $Z(L) = \{z\in U(L) \mid zu=uz,\ \forall u\in U(L)\}$ 为 $U(L)$ 的中心

1. prop: $Z(L)$ 在 $M(\lambda)$ 上作用为标量作用

pf: 设 $M(\lambda) = U(N^-)\cdot m_\lambda$，$m_\lambda = 1+K_\lambda$

$\forall h\in H$，$z\in Z(L) \Rightarrow h(zm_\lambda) = \lambda(h)zm_\lambda \in M(\lambda)_\lambda = C\cdot m_\lambda$

$\Rightarrow zm_\lambda = \xi\cdot m_\lambda$，$\xi\in C$

$\forall u\in U(N^-)$，$z(um_\lambda) = u(zm_\lambda) = \xi\cdot um_\lambda$ #

2. 令 $\chi_\lambda: Z(L) \to C$，则 χ_λ 作成 $Z(L)$ 的一维表示

$z \mapsto \xi$

并称 χ_λ 为 $M(\lambda)$ 的 central character

下边确定这一中心特征标

① $U(L)$ 以 $\{f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N}\cdot h_1^{s_1}\cdots h_l^{s_l}\cdot e_{\beta_1}^{t_1}\cdots e_{\beta_N}^{t_N}\}$ 为基.

$U(L)$ 为 L 模 $\Rightarrow$ $U(L)$ 作为 H 模

$\forall h\in H$, $h.f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N}\cdot h_1^{s_1}\cdots h_l^{s_l}\cdot e_{\beta_1}^{t_1}\cdots e_{\beta_N}^{t_N}$

$$=[(t_1-r_1)\beta_1+\cdots+(t_N-r_N)\beta_N]\cdot f_{\beta_1}^{r_1}\cdots f_{\beta_N}^{r_N}\cdot h_1^{s_1}\cdots h_l^{s_l}\cdot e_{\beta_1}^{t_1}\cdots e_{\beta_N}^{t_N}$$

$\Rightarrow$ $U(L)$ 基为权向量, $U(L)$ 有权空间分解

② 考虑 $U(L)_0=\{u\in U(L)\mid hu-uh=0,\ \forall h\in H\}$

显然有 $Z(L)\subseteq U(L)_0\leq U(L)$, 断言下边结论

Prop: (1) $U(L)N\cap U(L)_0=N^-U(L)\cap U(L)_0=K$

(2) K 为 $U(L)_0$ 的双侧理想

(3) $U(L)_0=K\oplus U(H)$

pf: (1) $U(L)N$ 由 $U(L)$ 中, $t_i>0\ (\exists)$ 的基元生成

$N^-U(L)$ 由 $U(L)$ 中, $r_i>0\ (\exists)$ 的基元生成

$U(L)_0$ 由 $U(L)$ 中, $\sum t_i\beta_i=\sum r_i\beta_i$ 的基元生成

$\Rightarrow$ 二者相等, 且 K 由 $U(L)$ 中, $\sum t_i\beta_i=\sum r_i\beta_i\neq 0$ 的基元生成

(2) $U(L)N$ 为 $U(L)$ 左理想 $\Rightarrow$ K 为 $U(L_0)$ 左理想, 右侧同理.

(3) $U(L_0)$ 由 $\sum t_i\beta_i=\sum r_i\beta_i$ 的基元生成,

其中 $U(H)$ 为和式 $=0$ 的部分, K 为和式 $\neq 0$ 的部分.

③ 令 $\varphi: U(L_0)\to U(H)$ 为投射映射, $\operatorname{Ker}\varphi=K$

由于 K 为双侧理想 $\Rightarrow$ φ 为代数同态.

并称 φ 为 Harish-Chandra 同态

④ 下边确定 χ_λ: Thm: $\chi_\lambda: Z(L)\to \mathbb{C}$ 为中心特征,

则 $\chi_\lambda(z)=\lambda(\varphi(z))$

pf: 即证 $\forall z\in Z(L)$, $zm_\lambda=\varphi(z)\cdot m_\lambda$

$Z(L) \subseteq \mathcal{U}(L)_0 = K \oplus \mathcal{U}(H) = \mathcal{U}(L)N \oplus \mathcal{U}(H)$

$\Rightarrow z = u_1 n_1 + \cdots + u_k n_k + \varphi(z), \quad u_i \in \mathcal{U}(L), n_i \in N$

$\Rightarrow z m_\lambda = (u_1 n_1 + \cdots + u_k n_k + \varphi(z)) m_\lambda$

$= \varphi(z) \cdot m_\lambda$

推论：$\mathcal{U}(L)_0$ 对 $\underline{m_\lambda}$ 作用为标量作用

3. twisted Harish-Chandra 同态

① 同态 φ s.t. $\varphi(Z(L)) \subseteq \mathcal{U}(H) \overset{交换}{=} S(H)$

H 以 $\{h_i\}_{i=1}^{l}$ 为基 $\Rightarrow$ $S(H)$ 上同态由 $\{h_i\}_{i=1}^{l}$ 确定

令 $T: S(H) \to S(H)$ 则 $T^{-1}: S(H) \to S(H)$

$h_i \mapsto h_i - 1, \qquad h_i \mapsto h_i + 1$

T 作为 $S(H)$ 的代数自同构

② $\forall \lambda \in H^*$, λ 可自然延拓为 $S(H)$ 的一维表示

即 $\lambda: S(H) \to \mathbb{C}$

$h_{i_1} \cdots h_{i_m} \mapsto \lambda(h_{i_1}) \cdots \lambda(h_{i_m})$

令 $\rho = w_1 + \cdots + w_l \in X$ 为主整权，$w_i = h_i^*$

$\Rightarrow \rho(h_i) = 1$

$\Rightarrow \lambda \circ T(h_i) = \lambda(h_i - 1) = (\lambda - \rho) h_i \qquad (\lambda(1) = 1, \forall \lambda \in H^*)$

$\Rightarrow \lambda \circ T|_H = \lambda - \rho|_H$

$\Rightarrow \lambda \circ T|_{S(H)} = \lambda - \rho|_{S(H)}$，$\rho$ 为 $S(H)^*$ 乘法单位！

③ 令 $T \circ \varphi: Z(L) \to S(H)$ 为代数同态，

并称其为 twisted Harish-Chandra 同态

4. $\operatorname{Im} T \circ \varphi \subseteq S(H)^W$

① prop (Verma 上的一些结论)

$\lambda \in H^*$，若 $\exists i$, s.t. $(\lambda + \rho)(h_i) \in \mathbb{Z}^+$

令 $v = f_i^{(\lambda+\rho)(h_i)} m_\lambda \in M(\lambda)$，$\mu = s_i(\lambda + \rho) - \rho$

则 $M(\mu) \cong \mathcal{U}(L)v$ 为 $M(\lambda)$ 子模

pf: 条件 $\Leftrightarrow \lambda = \sum k_i w_i \in X$ 且 $\exists i$ s.t. $k_i \geq 0$

(1) 先证 $v \in M(\lambda)_\mu$ 为非零权向量

recall $\mathcal{U}(N^-) \cong M(\lambda) = \mathcal{U}(N^-).m_\lambda$

$f_i^{(\lambda+\rho)(h_i)} \neq 0 \Rightarrow v = f_i^{(\lambda+\rho)(h_i)} m_\lambda \neq 0$

由 $h.v = [\lambda(h) - (\lambda+\rho)(h_i)\cdot\alpha_i(h)].v$

令 $\mu = \lambda - (\lambda+\rho)(h_i)\alpha_i \Rightarrow v \in M(\lambda)_\mu$

且 $s_i(\lambda+\rho) = \lambda+\rho - (\lambda+\rho)(h_i)\alpha_i$

$= \mu+\rho$

(2) 再证 $Nv = 0$. 只须对 $e_j \in e_\pi$ 讨论

recall Cpt 10.3: $e_i f_i^n v_\lambda = (n\cdot(\lambda(h_i) - (n-1))f_i^{n-1} + f_i^n e_i) v_\lambda$

$\Rightarrow$ 特别地, $e_i f_i^{\lambda(h_i)+1} v_\lambda = 0$

$i \neq j \Rightarrow e_j \cdot f_i^{(\lambda+\rho)(h_i)} m_\lambda = f_i^{(\lambda+\rho)(h_i)} \cdot e_j m_\lambda = 0$

$i = j \Rightarrow e_i f_i^{(\lambda+\rho)(h_i)} m_\lambda = e_i f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda = 0$

(3) 于是 $\mathcal{U}(B).v = \mathcal{U}(H).\mathcal{U}(N).v = C.v$

v 生成的 $M(\lambda)$ 子模为 $\mathcal{U}(L).v$

$= \mathcal{U}(N^-)\cdot\mathcal{U}(B)v$

$= \mathcal{U}(N^-)v$

考虑 $\theta: M(\mu) \to \mathcal{U}(L).v = \mathcal{U}(N^-)v$

$u\cdot m_\mu \mapsto u.v$, $\quad u \in \mathcal{U}(N^-)$

θ 为满同态, 且 $u.v = 0 \Rightarrow u.f_i^{(\lambda+\rho)(h_i)} m_\lambda = 0$

$\Rightarrow u\cdot f_i^{(\lambda+\rho)(h_i)} = 0$

又 $f_i^{(\lambda+\rho)(h_i)} \neq 0$, $\mathcal{U}(L)$ 无零因子, $\Rightarrow u = 0$

$\therefore \theta$ 作成同构

note: 这里有点类似罗老师讲的, 构造 $M(\lambda)$ 子模.

② 引理：若 $x, y \in S(H)$，s.t. $\lambda(x) = \lambda(y)$，$\forall \lambda \in H^*$，则 $x = y$

Pf：只须证 "$\lambda(x) \equiv 0$，$\forall \lambda \in H^* \Rightarrow x = 0$"

设 $x = x_1 \cdots x_m$，$x_i \in H$ s.t. $\lambda(x) \equiv 0$，$\forall \lambda \in H^*$

若 $x \neq 0$，则 $x_i \neq 0$，$\forall i$

令 $H_i^* = \{ \lambda \in H^* \mid \lambda(x_i) = 0 \}$

则 H_i^* 作为 H 真子空间

$\therefore \exists \lambda \in H^* \setminus \bigcup_{i=1}^{m} H_i^*$ s.t. $\lambda(x_i) \neq 0$

继而 $\lambda(x) \neq 0$ 矛.

引理2：$\forall \lambda \in H^*$，由 T 性质 "$\lambda \circ T = \lambda - \rho$" 和 "$\lambda \circ \varphi = \chi_\lambda$"

得 $(\lambda + \rho) \circ T \circ \varphi = \lambda \circ \varphi = \chi_\lambda$ $\quad$ ($\varphi : \mathcal{U}(L)_0 \to S(H)$)

引理3：若 $\lambda = \sum k_i w_i \in X$ s.t. $\exists i$，$k_i \geq 0$，

令 $\mu = s_i(\lambda + \rho) - \rho$，则 $M(\mu)$ 可视为 $M(\lambda)$ 子 L 模

特别地，有 $\chi_\lambda = \chi_\mu$.

Prop：令 $T \circ \varphi : Z(L) \to S(H)$ 为 twisted Harish-Chandra 同态

则 $\mathrm{Im}\, T \circ \varphi \subseteq S(H)^W$

Pf：即证：$\forall z \in Z(L)$，$T \circ \varphi(z) \in S(H)^W$

由 $W = \langle s_i \mid i = 1, \cdots, l \rangle$，只须对 s_i 验证

即 $s_i(T \circ \varphi(z)) = T \circ \varphi(z)$

由引理1，只须证 $\lambda(s_i(T \circ \varphi(z))) = \lambda(T \circ \varphi(z))$，$\forall \lambda \in H^*$

由 Zariski 拓扑的稠密子集性质

只须验证 $\lambda + \rho \in H^*$，$\lambda \in X^+$ 的情形

由引理2，$(\lambda + \rho)(T \circ \varphi(z)) = \chi_\lambda(z)$

$$(\lambda + \rho)(s_i(T \circ \varphi(z))) = s_i^{-1}(\lambda + \rho)(T \circ \varphi(z))$$

$$= \mu(T \circ \varphi(z)) = \chi_\mu(z)$$

由 $\lambda \in X^+$ 和引理3 $\Rightarrow \chi_\lambda = \chi_\mu$ #

至此，得到 $T\varphi: Z(L)\to S(H)^W$ 为代数同态.

实际上，后边部分将证明其为同构

5. G 对 $\mathcal{U}(L)$ 作用

① recall：$\theta: S(L)\to \mathcal{U}(L)$ 作为 L 模同构.

$$x_1\cdots x_n \mapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(n)} + J$$

J 为 $\{x\otimes y - y\otimes x - [xy]\}$ 在 $T(L)$ 上生成的理想.

由 $G=\mathrm{Int}\,L$ 作用定义 $\Rightarrow J$ 作为 G-模

$\Rightarrow \mathcal{U}(L)$ 作为 G 模

$\Rightarrow \theta$ 亦作为 G 模同构

② (1) 设 $x\in L$, s.t. $\mathrm{ad}\,x$ 幂零，则 x 在 T 上作用局部幂零

Pf：由 $x.\,y_1\otimes y_2 = [xy_1]\otimes y_2 + y_1\otimes[xy_2]$

归纳得，$(x)^{n\cdot m}.\,T^m(L)=0$，$n=\dim L$

note：T 由 X 生成，x 为 T 上导子，则 x 局部幂零 $\Leftrightarrow$ x 在 X 上局部幂零.

(2) 设 A 为代数，δ 为 A 上幂零导子，则 e^{δ} 作为 A 的代数自同构

Pf：归纳易证 $\delta^r(x\cdot y)=\sum_{i=0}^{r} C_r^i\cdot\delta^i(x)\cdot\delta^{r-i}(y)$

$$\Rightarrow e^{\delta}(x\cdot y)=\sum_{r\geq 0}\frac{1}{r!}\delta^r(x\cdot y)$$

$$=\sum_{r\geq 0}\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i!\,(r-i)!}\delta^i(x)\cdot\delta^{r-i}(y)$$

$i+j=r$

$$=\sum_{i\geq 0,\,j\geq 0}\frac{1}{i!\,j!}\cdot\delta^i(x)\cdot\delta^j(y)$$

$$=e^{\delta}(x)\cdot e^{\delta}(y)$$

$\Rightarrow e^{\delta}$ 作为代数同态，易见逆为 $e^{-\delta}$

特别地，x 为 T 上局部幂零导子 $\Rightarrow e^{x}$ 为 T 的自同构

此外，$e^{\mathrm{ad}\,x}\in \mathrm{Int}\,L=G$，$T$ 为 G 模 $\Rightarrow e^{\mathrm{ad}\,x}$ 为 T 的自同构

实际上，二者对 T 作用效果等价

即：$e^{x}.(y_1\otimes\cdots\otimes y_m) \overset{\text{代数同态}}{=\!=} (e^{x}.y_1)\otimes\cdots\otimes(e^{x}.y_m)$

(x 在 L 上作用为 $\mathrm{ad}\,x$) $\overset{L\text{上作用}}{=\!=} (e^{\mathrm{ad}\,x}.y_1)\otimes\cdots\otimes(e^{\mathrm{ad}\,x}.y_m)$

G作用定义 $e^{\mathrm{ad}x}(y_1\otimes\cdots\otimes y_m)$

※. 因此. $e^{\mathrm{ad}x}\in G$ 对 T 的作用 可理解为幂零导子的累加作用

(3) $x\in L$ 且 $(\mathrm{ad}x)^n=0$, 令 $\{c_i\}_{i=1}^n$ 为 $\mathbb{C}$ 上互不相同的 n 个数

则 $\mathrm{span}\{1,\mathrm{ad}x,\cdots,\mathrm{ad}x^{n-1}\}=\mathrm{span}\{e^{\mathrm{ad}c_ix}\mid i=1,\cdots,n\}$

Pf: 由

$$e^{\mathrm{ad}c_ix}=\left(1,\mathrm{ad}x,\cdots,\frac{(\mathrm{ad}x)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\begin{pmatrix}1\\c_i\\\vdots\\c_i^{n-1}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\left(e^{\mathrm{ad}c_1x},\cdots,e^{\mathrm{ad}c_nx}\right)=\left(1,\mathrm{ad}x,\cdots,\frac{(\mathrm{ad}x)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\c_1&c_2&\cdots&c_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_1^{n-1}&c_2^{n-1}&\cdots&c_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

右侧矩阵行列式为范德蒙德行列式，故可逆. #

(4) prop: $\mathcal{U}(L)^G=Z(L)$

Pf: $\supseteq$: $z\in Z(L)\Rightarrow \mathrm{ad}x.z=0,\ \forall x\in L$

$\Rightarrow e^{\mathrm{ad}x}.z=z,\ \forall x\in L$ 且 $\mathrm{ad}x$ 幂零, $e^{\mathrm{ad}x}$ 视为G作用

$\Rightarrow z\in\mathcal{U}(L)^G$

$\subseteq$: $\forall x\in L$ 且 $\mathrm{ad}x$ 幂零

$u\in\mathcal{U}(L)^G\Rightarrow e^{\mathrm{ad}x}.u=u.$

由上边引理 $\Rightarrow \mathrm{ad}x=\eta_1 e^{\mathrm{ad}c_1x}+\cdots+\eta_{t+1}e^{\mathrm{ad}c_{t+1}x}$

$\Rightarrow \mathrm{ad}x.u=(\eta_1+\cdots+\eta_{t+1})\cdot u$

由 $\mathrm{ad}x$ 幂零 $\Rightarrow \eta_1+\cdots+\eta_{t+1}=0$

$\Rightarrow \mathrm{ad}x.u=0$

由 性质 $[x_1\cdot x_2,u]=x_1\cdot[x_2,u]+[x_1,u]\cdot x_2$

知, 只须证 u 与 $\mathcal{U}(L)$ 生成元交换

现 $\{e_1,\cdots,e_l,f_1,\cdots,f_l\}$ 在 L 上幂零 $\Rightarrow u$ 与 e_i,f_i 交换

又 $\{e_i,f_i\}_{i=1}^l$ 生成 $\mathcal{U}(L)$. #

note: 这里生成只代数生成, h_i 由 $h_i=e_if_i-f_ie_i$ 生成

6、Z(L) 结构

I 现：$S(L)^G \rightleftharpoons \mathcal{U}(L)^G$ 为 G 模同构（非代）

$x_1\cdots x_m \mapsto \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)}$

而 $\mathcal{U}(L)^G = Z(L)$

$\Rightarrow$ $\theta: S(L)^G \to Z(L)$ 为 G 模同构

又 $\eta: S(L)^G \to S(H)^W$ 为代数同构

$\Rightarrow \eta\theta^{-1}: Z(L) \to S(H)^W$ 为空间同构

II 前边得到：$T\circ\varphi: Z(L) \to S(H)^W$ 为代数同态

下边通过 $\eta\theta^{-1}$ 同构性得 $T\circ\varphi$ 同构性

① $\mathcal{U}(L)$ 作成 filtered 代数：$\mathcal{U}_0(L) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{U}_n(L) \subseteq \cdots$

令 $Z_i(L) = \mathcal{U}_i(L) \cap Z(L) \Rightarrow Z(L)$ 作成 filtered 代数，

$S(H) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} S^m(H)$，令 $S_n(H) = \bigoplus_{m=0}^{n} S^m(H)$

$\Rightarrow S(H)$ 作成 filtered 代数

令 $S_i(H)^W = S_i(H) \cap S(H)^W \Rightarrow S(H)^W$ 亦作成 filtered 代数

② lemma：$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$，$B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ 为 filtered 代数。

令 $grA = A_0 \oplus \sum_{i=1}^{\infty} A_i/A_{i-1}$ 为 A 的 graded 代数

$grB = B_0 \oplus \sum_{i=1}^{\infty} B_i/B_{i-1}$ 为 B 的 graded 代数

若 $\exists\ \alpha: A \to B$ s.t. $\alpha(A_i) \subseteq B_i$

则 (1). $\exists\ gr\alpha: A \to B$ s.t. $gr\alpha(A_{i-1}+a_i) = B_{i-1}+\alpha(a_i)$

(2) 若 $\alpha(A_i) = B_i$，且 α 双射 $\Rightarrow gr\alpha$ 双射

(3) 若 $gr\alpha$ 双射，则 α 双射.

证明不难，参见 P233–P234.

③. $T\circ\varphi: Z(L) \to S(H)^W$ 作成代数同构

思路：$T\circ\varphi: Z(L) \to S(H)^W$ 为代数同态

$\eta\circ\theta^{-1}: Z(L) \to S(H)^W$ 为空间同构

$\Rightarrow gr(T\circ\varphi): gr\, Z(L) \to gr\, S(H)^W$

$gr(\eta\circ\theta^{-1}): gr\, Z(L) \to gr\, S(H)^W$

(1) 先证 $gr(T\circ\varphi) = gr(\eta\theta^{-1})$

(2) 由 $\eta\circ\theta^{-1}$ 双射 且 $\eta\theta^{-1}(Z_i(L)) = S_i(H)^W$

$\Rightarrow gr(\eta\circ\theta^{-1})$ 为双射

$\Rightarrow gr(T\circ\varphi)$ 为双射

$\Rightarrow T\circ\varphi$ 为双射

参见 P234 - P235 (引理)

④. 推论: $Z(L) \cong \mathbb{C}[x_1 \cdots x_l]$ 为代数同构

推论2: $\lambda, \mu \in H^*$, 则 $\chi_\lambda = \chi_\mu \Leftrightarrow \mu+\rho = w(\lambda+\rho)$, $\exists w \in W$

pf: $\Leftarrow$: $\mu+\rho = w(\lambda+\rho)$, $\forall z \in Z(L)$

$\Rightarrow \chi_\mu(z) \xrightarrow{\chi_\mu = \mu\circ\varphi} \mu\circ\varphi(z)$

$= (w(\lambda+\rho)-\rho)(\varphi(z))$ 记 $\lambda\circ T = \lambda-\rho$

$= w(\lambda+\rho)\circ T\circ\varphi(z)$

$= (\lambda+\rho)w^{-1}T((\varphi(z)))$

又 $T\circ\varphi(z) \in S(H)^W \Rightarrow w^{-1}T\circ(\varphi(z)) = T\circ\varphi(z)$

$\Rightarrow \chi_\mu(z) = (\lambda+\rho)T(\varphi(z)) = \chi_\lambda$

$\Rightarrow$: $\mu+\rho \neq w(\lambda+\rho)$, $\forall w \in W$

$\Rightarrow W(\lambda+\rho) \cap W(\mu+\rho) = \phi$

$\Rightarrow \exists$ 多项式 $Q \in P(H^*) = S(H)$

s.t. $Q(W(\lambda+\rho)) \equiv 1$, $Q(W(\mu+\rho)) \equiv 0$, (插值)

不妨设 $Q \in S(H)^W$, 否则 可用 $\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} w(Q)$ 代替

$\Rightarrow \exists z \in Z(L)$ s.t. $T\circ\varphi(z) = Q$

$\Rightarrow \chi_\lambda(z) = \lambda\circ\varphi(z) = (\lambda+\rho)(T\circ\varphi(z)) = (\lambda+\rho)(Q) = 1$

$\chi_\mu(z) = (\mu+\rho)Q = 0$. #

小结：

① $Z(L)$ 对 $M(\lambda)$ 标量作用 $\Rightarrow \chi_\lambda: Z(L) \to \mathbb{C}$ 为 $M(\lambda)$ 中心特征标

② $Z(L) \hookrightarrow \mathcal{U}(L)_0 = \mathcal{U}(H) \oplus K \Rightarrow \varphi: \mathcal{U}(L)_0 \to \mathcal{U}(H)$

$\Rightarrow \varphi: Z(L) \to \mathcal{U}(H) \overset{H交换}{=} S(H)$

$\Rightarrow \chi_\lambda = \lambda \circ \varphi$

③. $T: S(H) \to S(H)$ 为代数自同构 且 $\lambda \circ T = \lambda - \rho$ （为了简化简）

$\Rightarrow T \circ \varphi: Z(L) \to S(H)^W$ 作为代数同态

④. $Z(L) = \mathcal{U}(L)^G \Rightarrow \eta \cdot \theta^{-1}: Z(L) \to S(H)^W$ 为模同构

filtered 性质 $\Rightarrow T \circ \varphi$ 为代数同构.

Cpt 11.6 Casimir 元素

1. 设 L 以 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为基，且半单

L 的 Killing 型非退化 $\Rightarrow \exists! \{y_i\}_{i=1}^n$ s.t. $\langle x_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$

令 $c = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 称为 $\mathcal{U}(L)$ 的 Casimir 元，则 c 与基选取无关

Pf: 设 $\{x_i'\}_{i=1}^n$ 为 L 基，且关于 Killing 对偶基为 $\{y_i'\}_{i=1}^n$

则
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, (y_1 \cdots y_n) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, (y_1' \cdots y_n') \right\rangle = E$$

设 $(x_1', \cdots, x_n') = (x_1 \cdots x_n) B$

$\Rightarrow (y_1', \cdots, y_n') = (y_1 \cdots y_n) \cdot B^{-T}$

$$\Rightarrow (x_1', \cdots, x_n') \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = (x_1 \cdots x_n) B \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \#$$

(note: c 仅与 $\langle , \rangle$ 有关，
不同 $\langle , \rangle$ 下，c 相差对应常数倍)

2. Casimir 元 $c \in Z(L)$

Pf: $\forall x \in L$, $c \cdot x = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot x$

$= (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} y_1 x \\ \vdots \\ y_n x \end{pmatrix}$

$= (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} x y_1 \\ \vdots \\ x y_n \end{pmatrix} + (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} [y_1, x] \\ \vdots \\ [y_n, x] \end{pmatrix}$

$= (x_1 x \cdots x_n x)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} [y_1, x] \\ \vdots \\ [y_n, x] \end{pmatrix}$

$= x \cdot C + ([x_1 x] \cdots [x_n x])\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} [y_1, x] \\ \vdots \\ [y_n, x] \end{pmatrix}$

只须证右侧2个加式和为0

lemma: $\forall z \in L$, $z = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, z\rangle \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, z\rangle \cdot x_i$

$= (y_1 \cdots y_n)\begin{pmatrix} \langle x_1, z\rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, z\rangle \end{pmatrix} = (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} \langle y_1, z\rangle \\ \vdots \\ \langle y_n, z\rangle \end{pmatrix}$

特别地, $(z_1, \cdots z_n) = (x_1 \cdots x_n)(\langle y_i, z_j\rangle)$

$= (y_1 \cdots y_n)(\langle x_i, z_j\rangle)$

由引理, $([x_1, x], \cdots, [x_n, x]) = (x_1 \cdots x_n) \cdot B_1$

$([y_1, x], \cdots, [y_n, x]) = (y_1, \cdots, y_n) B_2$

其中 $B_1 = (\langle [x_j, x], y_i\rangle)$, $B_2 = (\langle [y_j, x], x_i\rangle)$

由 $\langle [x_i, x], y_j\rangle = -\langle [y_j, x], x_i\rangle$

$\Rightarrow B_2 = B_1^{-T}$

$\Rightarrow ([x_1 x] \cdots [x_n x])\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} [y_1, x] \\ \vdots \\ [y_n, x] \end{pmatrix}$

$= (x_1 \cdots x_n) B_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + (x_1 \cdots x_n) \cdot B_1^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$ #

3. recall: $\langle h_\alpha, h_\alpha\rangle = \langle h_\alpha, [e_\alpha f_\alpha]\rangle$

$= \langle [h_\alpha e_\alpha], f_\alpha\rangle$

$= 2\langle e_\alpha f_\alpha\rangle$

$\Rightarrow \langle e_\alpha, f_\alpha\rangle = \frac{1}{2}\langle h_\alpha, h_\alpha\rangle$, $h_\alpha = \frac{2h_\alpha'}{|\alpha|^2}$

$= \frac{2}{|\alpha|^2}$

若用 $\frac{|\alpha|^2}{2} f_\alpha$ 代替 f_α, 则 $\langle e_\alpha, f_\alpha\rangle = 1$,

此时 $[e_\alpha, f_\alpha] = \frac{|\alpha|^2}{2} \cdot h_\alpha = h_\alpha'$

令 $\{h_i'\}_{i=1}^{l}$ 为 H 基, $\{h_i''\}_{i=1}^{l}$ 为其关于 Killing 型对偶基.

则 $C = h_1' \cdot h_1'' + \cdots + h_l' \cdot h_l'' + \sum_{\alpha \in \Phi^+} e_\alpha f_\alpha + \sum_{\alpha \in \Phi^+} f_\alpha e_\alpha$

$= \sum_{i=1}^{l} h_i' \cdot h_i'' + \sum_{\alpha \in \Phi^+} h_\alpha' + 2\sum_{\alpha \in \Phi^+} f_\alpha e_\alpha$

Prop: 令 $c \in Z$ 为 Casimir 元. 则 $\chi_\lambda(c) = \langle\lambda+\rho, \lambda+\rho\rangle - \langle\rho,\rho\rangle$

pf: $c \cdot m_\lambda = \left(\sum_{i=1}^{l} h_i' \cdot h_i'' + \sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha' + 2\sum_{\alpha\in\Phi^+} f_\alpha e_\alpha\right) m_\lambda$

$= \left(\sum_{i=1}^{l} \lambda(h_i')\lambda(h_i'') + \sum_{\alpha\in\Phi^+} \lambda(h_\alpha')\right) m_\lambda$

其中 $\sum_{\alpha\in\Phi^+} \lambda(h_\alpha') = \langle\lambda, \sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha\rangle = 2\langle\lambda,\rho\rangle$

设 $h_\lambda' = (h_1' \cdots h_l')\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix}$

$= (h_1'' \cdots h_l'')\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda(h_i') = \langle h_\lambda', h_i'\rangle = b_i$

$\lambda(h_i'') = \langle h_\lambda', h_i''\rangle = a_i$

$\Rightarrow (\lambda(h_1') \cdots \lambda(h_l'))\begin{pmatrix} \lambda(h_1'') \\ \vdots \\ \lambda(h_l'') \end{pmatrix}$

$= (b_1 \cdots b_l)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix}$

$= (b_1 \cdots b_l)\left\langle \begin{pmatrix} h_1'' \\ \vdots \\ h_l'' \end{pmatrix}, (h_1' \cdots h_l')\right\rangle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix}$

$= \langle h_\lambda', h_\lambda'\rangle = \langle\lambda,\lambda\rangle$

note: c 与内积有关(相差常数倍), 但 $\chi(c)$ 与内积无关

note2: $\langle\lambda, \sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha\rangle = 2\langle\lambda, \sum_{\alpha\in\Pi}\alpha\rangle$

小结: $P(L)^G$, $P(H)^W$, $S(L)^G$, $S(H)^W$, $Z(L)=\mathcal{U}(L)^G$ 同构于 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_l]$

① $P(L)^G \to P(H)^W$

$f \mapsto f|_H$

与内积有关 ② $S(L)^G \to P(L)^G$, $S(H)^W \to P(H)^W$ 同理

$x_1\cdots x_n \mapsto x_1^*\cdots x_n^*$, $x_i^* = \langle x_i, -\rangle$

③ $S(L)^G \to S(H)^W$, 其中 $h\in S(H)$, $k \in S(L).\{N^+\cup N^-\}$

$h+k \mapsto h$

④. $\theta: S(L)^G \to \mathcal{U}(L)^G$ 为 G, L 模同构

$x_1\cdots x_n \mapsto \frac{1}{n!}\sum_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$

$\varphi: \mathcal{U}(L)_0 \to \mathcal{U}(H) = S(H)$

$T\circ\varphi: Z(L) \to S(H)^W$ 作成代数同构

$h+u \mapsto h$, $u \in \mathcal{U}(L).N \cap \mathcal{U}(L)_0$

补：$sl(2,\mathbb{C})$ 上的例子

令 $L=\mathrm{span}\{e,f,h\}$，$[ef]=h$，$[h,e]=2e$，$[h,f]=2f$

$H=\mathrm{span}\{h\}$ $\Rightarrow$ 此时上述 5 个代数均同构于 $\mathbb{C}[x]$

下面具体计算（Lemma：5 个代数生成元均为齐次单项式）

① $S(H)=\mathrm{span}\{h^n \mid n\in\mathbb{Z}_+\}$，$W=\langle s\rangle$，$sh=-h$

$\Rightarrow S(H)^W=\mathrm{span}\{h^{2n}\mid n\in\mathbb{Z}_+\}=\mathbb{C}[h^2]$

② 由 $S(L)\to S(L)/\{e,f\}\cong S(H)$

$\Rightarrow \eta: S(L)^G\to S(H)$，

$\Rightarrow \eta^{-1}(h^2)=h^2+x$

由 $G=\langle e^{ade}, e^{adf}\rangle$ 易验证知 $x=kef$ 符合要求

note：由 e^{ade}：$f\mapsto f+h-e$ 知，x 必不含 f 的一次单项式

$h\mapsto h-2e$

$e\mapsto e$

（否则作用后 h 系数改变，与 g 作用不变矛盾）

同理，x 不含 e 的一次单项式．

由 e^{ade}：$\begin{cases} h^2\mapsto (h-2e)^2 \\ f^2\mapsto (f+h-e)^2 \\ ef\mapsto e(f+h-e) \\ e^2\mapsto e^2 \end{cases}$ 知，x 不含 f^2 单项式

同理 x 不含 e^2 单项式．

从此过程，可得到 $\eta^{-1}(I_i)$ 为齐次多项式

③．令 f^*,h^*,e^* 为 $\{f,h,e\}$ 关于 $\langle,\rangle$ 的对偶基，

$\varphi: L\to L^*$

$x\mapsto \langle x,-\rangle$

$\varphi(f)=\langle f,f\rangle\cdot f^*+\langle f,h\rangle\cdot h^*+\langle f,e\rangle\cdot e^*$

$= \langle f, e \rangle \cdot e^* = \frac{1}{2} \langle h, h \rangle \cdot e^*$

$= 4 e^*$

$\varphi(h) = 8 \cdot h^*, \quad \varphi(e) = 4 f^*$

$\Rightarrow \varphi(h^2 + 4ef) = 64 \cdot h^{*2} + 64 e^* f^*$

$\Rightarrow P(L)^G = \mathbb{C}[h^{*2} + e^* f^*]$

④. $P(H)^W = \mathbb{C}[\alpha^2]$

⑤ 考虑 G 模同构 $S(L)^G \to \mathcal{U}(L)^G = Z(L)$

$h^2 + 4ef \mapsto h^2 + 2ef + 2fe = h^2 + 2h + 4fe$

综上：$S(H)^W = \mathbb{C}[h^2]$

$P(H)^W = \mathbb{C}[\alpha^2]$

$S(L)^G = \mathbb{C}[h^2 + 4fe]$

$P(L)^G = \mathbb{C}[h^{*2} + f^* \cdot e^*]$

$Z(L) = \mathbb{C}[h^2 + 2h + 4fe]$