Cpt12. 特征标与维数公式

Cpt12.1 L模特征标

下设L半单

1. 特征标与环

① 若V为L模且关于H有一维权空间分解

$V=\bigoplus_{\lambda} V_\lambda$，其中 $\dim V_\lambda<\infty$

则称V配备了特征标 $\mathrm{ch}V: H^* \to \mathbb{Z}_+$

$\lambda \mapsto \dim V_\lambda$

note：若V上配备了特征标，则V作为H模的结构由chV唯一确定

例：$M(\lambda)=\bigoplus_{\mu} M(\lambda)_\mu$，其中 $\dim M(\lambda)_\mu=\wp(\lambda-\mu)$

即 $\mathrm{ch}M(\lambda): H^*\to \mathbb{Z}_+$

$\mu \mapsto \wp(\lambda-\mu)$

②. $\forall$ 函数 $f: H^*\to \mathbb{Z}$

令 $\mathrm{supp}(f)=\{\lambda\in H^* \mid f(\lambda)\neq 0\}$

特别地 $\mathrm{supp}(\mathrm{ch}M(\lambda))=\{\mu\in H^*\mid \mu<\lambda\}$

记 $S(\lambda)=\mathrm{supp}(\mathrm{ch}M(\lambda))$

③ 令 $\mathcal{X}$ 由所有满足下述条件的函数 $f: H^*\to\mathbb{Z}$ 构成

$\exists\, \lambda_1,\cdots,\lambda_k\in H^*$ s.t. $\mathrm{supp}(f)\subseteq S(\lambda_1)\cup\cdots\cup S(\lambda_k)$

则 $\mathcal{X}$ 作成环，其乘法 $(f\cdot g)(\lambda)=\sum_{\nu+\mu=\lambda} f(\mu)g(\nu)$

pf: (1) 设 $\mathrm{supp}(f)\subseteq S(\mu_1)\cup\cdots\cup S(\mu_k)$

$\mathrm{supp}(g)\subseteq S(\nu_1)\cup\cdots\cup S(\nu_k)$

考虑求和式中非零项 $f(\mu)\cdot g(\nu)$

$\exists\, i, j$ s.t. $\mu = \mu_i - m_1\alpha_1 - \cdots - m_l\alpha_l$

$\nu = \nu_j - n_1\alpha_1 - \cdots - n_l\alpha_l$

二式相加，得 $\lambda = \mu_i + \nu_j - (m_1+n_1)\alpha_1 - \cdots - (m_l+n_l)\alpha_l$

右侧 $\{m_i\}, \{n_i\}$ 有限解，因而 ν, μ 有限解.

故求和式有限，因而良定义.

(2) 此外，$\mathrm{supp}(f\cdot g) \subseteq \bigcup_{i,j} S(\lambda_i+\mu_j)$

(3) 另由 $f_1\cdot f_2\cdot f_3(\lambda) = \sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3=\lambda} f_1(\mu_1)\cdot f_2(\mu_2)\cdot f_3(\mu_3)$

知 $\mathcal{R}$ 作成结合，交换环.

note: 特别地 $\mathrm{ch}\, M(\lambda) \in \mathcal{R}$

此外，由于 $\mathrm{ch}\, L(\lambda)(\mu) = \dim L(\lambda)_\mu \leq \dim M(\lambda)_\mu = \mathrm{ch}\, M(\lambda)(\mu)$

从有 $\mathrm{supp}(\mathrm{ch}\, L(\lambda)) \subseteq \mathrm{supp}(\mathrm{ch}\, M(\lambda))$，因而 $\mathrm{ch}\, L(\lambda) \in \mathcal{R}$

④. 记 $e_\lambda : H^* \to \mathbb{Z}_+$，$e_\lambda(\lambda) = 1$，$e_\lambda(\mu) = 0$，$\forall \mu \neq \lambda$

则 $e_\lambda \in \mathcal{R}$ 且 $\forall f \in \mathcal{R}$，$f = \sum_{\lambda\in H^*} f(\lambda) e_\lambda$.

note: 和式可能为无穷和，但不影响定义.

note2: $e_\lambda \cdot e_\mu(\nu) = \sum_{\nu_1+\nu_2=\nu} e_\lambda(\nu_1)\cdot e_\mu(\nu_2) = e_{\lambda+\mu}(\nu)$

即 $e_\lambda \cdot e_\mu = e_{\lambda+\mu}$

2. V 为 L 模配备了特征标，则对 V 任一子模 U

U 与 V/U 亦配备了特征标，且 $\mathrm{ch}\, U + \mathrm{ch}\, \frac{V}{U} = \mathrm{ch}\, V$

pf: 由权空间分解的遗传性和保商性质即证.

3. 设 L 模 V_1, V_2 配备特征标，且 $\mathrm{ch}\, V_1, \mathrm{ch}\, V_2 \in \mathcal{R}$

则 $V_1 \otimes V_2$ 配备了特征标，且 $\mathrm{ch}(V_1\otimes V_2) = \mathrm{ch}\, V_1 \cdot \mathrm{ch}\, V_2$

pf: 设 $V_1 = \bigoplus_\lambda (V_1)_\lambda$，$V_2 = \bigoplus_\mu (V_2)_\mu$，为权空间分解

则 $V_1 \otimes V_2 = \bigoplus_{\lambda,\mu} ((V_1)_\lambda \otimes (V_2)_\mu)$ 亦为权空间分解

其中 $(V_1)_\lambda \otimes (V_2)_\mu \subseteq (V_1\otimes V_2)_{\lambda+\mu}$

$\therefore \mathrm{ch}(V_1\otimes V_2)(\nu) = \dim (V_1\otimes V_2)_\nu$

$$= \sum_{\lambda+\mu=\nu} \dim(V_1)_\lambda \cdot \dim(V_2)_\mu$$

$$= ch\, V_1 \cdot ch\, V_2\,(\nu) . \quad \#$$

小结：① 定义了特征标 $ch\,V$ 及 H^* 上函数环 $\mathcal{X}$

② $\mathcal{X}$ 结构与计算性质

Cpt 12.2 Verma 模的特征标

1. 关于 $\mathcal{X}$

① $e_\lambda \cdot e_\mu = e_{\lambda+\mu}$，即 e_λ 对下标 λ 有"指数线性"性，此性质可用于简化推导

② 令 $i: H^* \to \mathbb{Z}$，$i(\lambda) = 0\ \forall \lambda \neq 0$，$i(0) = 1$

则 i 作成 $\mathcal{X}$ 中的乘法幺元.

③ 由 $e_\lambda \cdot e_{-\lambda} = 1$，$e_\lambda$ 在 $\mathcal{X}$ 中总是可逆的！

2. recall 基本模性质

① $\{w_i\} = \{h_i^*\}$ 为 $\{\alpha_i^\vee\}$ 关于 $\langle , \rangle$ 的对偶基

② 引理：$\{w_i\}$，$\{v_i\}$ 关于 $\langle , \rangle$ 对偶，

若 $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$，$i \neq j$，则 $\langle w_i, w_j \rangle \geq 0$，$\forall i,j$

③ 推论：w_i 为 α_i 的非负线性组合

Pf：w_i 为 $\alpha_i^\vee$ 的对偶基，而 $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0$，$\forall i \neq j$（由 Cartan 阵可见）

故 $\langle w_i, w_j \rangle \geq 0$，$\forall i,j$

于是 $w_i = \sum_j \langle w_i, w_j \rangle \cdot \alpha_j^\vee$ 为 $\alpha_i^\vee$ 非负线性组合. #

④ $s_i w_j = w_j - \langle w_j, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i = w_j - \delta_{ij} \alpha_i$

⑤. 令 $\rho = \sum_{i=1}^{c} w_i$，则 $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$

Pf：令 $\rho' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$

由 $s_i\, \Phi^+ \setminus \{\alpha_i\} = \Phi^+ \setminus \{\alpha_i\}$ 知 $s_i \rho' = \rho' - 2\alpha_i = \rho' - \langle \rho', \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$

于是 $\langle \rho', \alpha_i^\vee \rangle = 1$，进而 $\rho' = \sum_i \langle \rho', \alpha_i^\vee \rangle w_i = \rho$. #

3. $\mathrm{ch}\,M(\lambda)$ 公式

① 由 $\mathrm{ch}\,M(\lambda)(\mu) = \mathcal{P}(\lambda-\mu)$

得 $\mathrm{ch}\,M(\lambda) = \sum_{\mu\in H^*} \mathcal{P}(\lambda-\mu)\cdot e_\mu$ 令 $\nu=\lambda-\mu$

$= \sum_{\nu\in H^*} \mathcal{P}(\nu)\cdot e_{\lambda-\nu}$

$= e_\lambda \cdot \sum_{\nu\in H^*} \mathcal{P}(\nu)\cdot e_{-\nu}$

令 $\Gamma = \mathrm{ch}\,M(0) = \sum_{\nu\in H^*} \mathcal{P}(\nu) e_{-\nu}$，则 $\mathrm{ch}\,M(\lambda) = e_\lambda\cdot\Gamma$

note 1, $\mathrm{ch}\,M(\lambda+\mu) = e_\lambda\cdot \mathrm{ch}\,M(\mu) = e_\mu\cdot \mathrm{ch}\,M(\lambda)$

Note 2: Verma 模 $M(\lambda)$ 本身的权空间分解体现了与 λ 有某种无关性（例如不同 λ，$M(\lambda)$ 均以 $\mathcal{U}(N^-)$ 为基）

②. Γ 在 R 上有逆元 $\Gamma^{-1} = \prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e_{-\alpha})$

Pf: 设 $\Phi^+ = \{\beta_1,\cdots,\beta_N\}$

则 $\mathcal{P}(\nu)\neq 0 \iff \nu = r_1\beta_1+\cdots+r_N\beta_N,\ r_i\in\mathbb{Z}_+$

实际上，$\mathcal{P}(\nu)$ 的值为右边 $\{r_i\}$ 的解数

于是：$\Gamma = \sum_\nu \mathcal{P}(\nu) e_{-\nu} = \sum_{r_1,\cdots,r_N\geq 0} e_{-r_1\beta_1-\cdots-r_N\beta_N}$

$= \sum_{r_1,\cdots,r_N\geq 0} e_{-\beta_1}^{r_1}\cdot\cdots\cdot e_{-\beta_N}^{r_N}$

$= \prod_{i=1}^N \left(\sum_{r_i\geq 0} e_{-\beta_i}^{r_i}\right)$

$= \prod_{i=1}^N (1-e_{-\beta_i})^{-1}$

note: 过程中，尽管出现了无穷和，但具体作用在 H^* 上时，像集上仍表现为有限和，因而良定义

③ 令 $\Delta = e_\rho\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e_{-\alpha})$，则 $\mathrm{ch}\,M(\lambda) = \dfrac{e_{\lambda+\rho}}{\Delta}$

Pf: $\mathrm{ch}\,M(\lambda) = e_\lambda\Gamma = \dfrac{e_\lambda e_\rho}{e_\rho\cdot\Gamma^{-1}} = \dfrac{e_{\lambda+\rho}}{\Delta}$ #

④. $\Delta = e_{-\rho}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e_\alpha-1)$

Pf: $\Delta = e_\rho\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e_{-\alpha}) = e_\rho\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+} e_{-\alpha}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e_\alpha-1)$

$= e_{\rho-2\rho}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e_\alpha-1)$

$= e_{-\rho}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e_\alpha-1)$

Cpt 12.3. Chambers 与根

1. 基本室与墙

① S_α 作用在 V 上，记 L_α 为 S_α 的稳定点，也即 α 的垂空间

② $V-\bigcup_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$ 分成若干连通分支，各分支称为 V 的 chamber

③ 设 C 为 chamber，令 $\delta(C)$ 为 C 的边界

若 L_α s.t. $L_\alpha\cap\delta(C)$ 张成 L_α，则称 L_α 为 C 的墙.

④ 令 $C=\{v\in V \mid \langle\alpha, v\rangle>0, \forall\alpha\in\Pi\}$ 称为 C 关于 Π 的基本室

则 C 的所有墙为 $L_{\alpha_1},\cdots,L_{\alpha_l}$

Pf: $\delta(C)=\{v\in V \mid \langle\alpha_i, v\rangle\geq 0, \forall i, 且\ \exists j\ s.t.\ \langle\alpha_j, v\rangle=0\}$

$L_{\alpha_i}\cap\delta(C)=\{v\in V \mid \langle\alpha_j, v\rangle\geq 0, \forall j, 且\ \langle\alpha_i, v\rangle=0\}$

故 $L_{\alpha_i}\cap\delta(C)$ 张成 L_{α_i}，因而 L_{α_i} 为墙

另一方面 设 $\alpha=\sum n_i\alpha_i$，为 至少 2 个 正系数

$\forall v\in L_\alpha\cap\delta(C)$，有 $\sum n_i\langle\alpha_i, v\rangle=0$

又 $\langle\alpha_i, v\rangle\geq 0$，$\therefore n_i\neq 0$ 时，$\langle\alpha_i, v\rangle=0$

故 v 落在 L_α 真子空间中 #

2. prop: (1) $\forall C_1, C_2$ 为 chamber. $\exists! w\in W$ s.t. $wC_1=C_2$

(2) 设 C 为基本室，则 $\mathcal{C}=\{wC \mid w\in W\}$ 构成全体室，且两两不同.

(3) $\forall v\in V$, $\bar{C}\cap W_v=\{\bar{v}\}$

note: 结论由反射群得到.

3. $v\in C \iff v=\sum_{i=1}^{l} n_i w_i$，其中 $n_i>0$

$v\in\bar{C} \iff v=\sum_{i=1}^{l} n_i w_i$，其中 $n_i\geq 0$

Pf: 设 $v=\sum_{i=1}^{l} n_i w_i$

$v\in C \iff \langle\alpha_i, v\rangle>0, \forall\alpha_i\in\Pi$

$\iff n_i=\sum_{j=1}^{l} n_j\langle\alpha_i, w_j\rangle>0, \forall\alpha_i\in\Pi$，另一个同理 #

例子：A_2，B_2，G_2

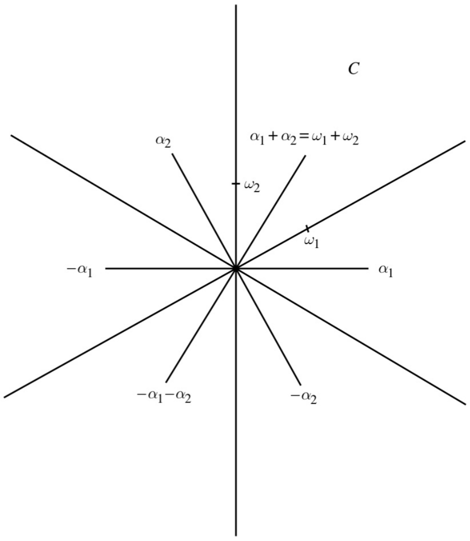
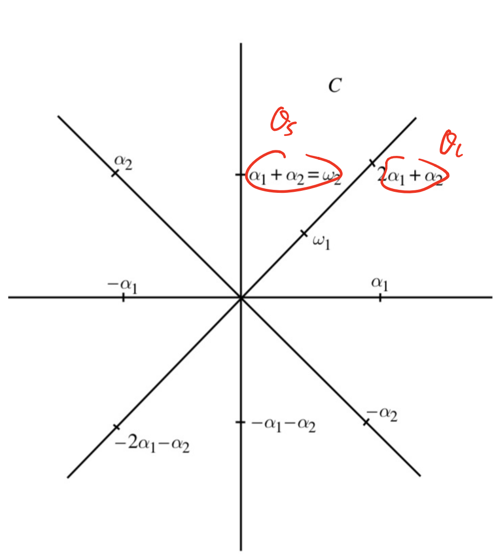


Figure 12.1 Two-dimensional root system type A_2



igure 12.2 Two-dimensional root system type B_2

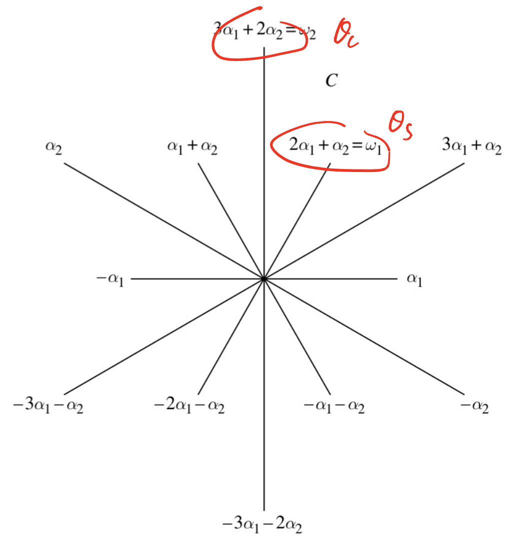


Figure 12.3 Two-dimensional root system type G_2

Note: $\{\omega_i\}$为$\{\alpha_i^\vee\}$的对偶基，于是在对应垂直空间的交上!!

4. 设Φ为单李代数根系，C为基本室，则

(1) 若Φ所有根等长，则 $\exists!\ \theta_l=\sum_{i=1}^{l} a_i\alpha_i\in\bar{C}$

且θ_l满足 $\forall\alpha=\sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i$，有 $k_i\le a_i$

(2) 若Φ有2种根长，则存在唯二根 $\theta_l=\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i$，$\theta_s=\sum_{i=1}^{l}c_i\alpha_i$

其中θ_l为长根，θ_s为短根，且θ_l满足(1)条件

θ_l称为 highest root，θ_s称为 highest short root.

① lemma1：Φ中等长的根在同一轨道上

Pf：$\because\ \Phi=W\Pi$，

$\therefore\ \forall\beta\in\Phi,\ \exists\alpha\in\Pi$ s.t. $\beta\in W\alpha$

又$\because$ 相邻等长的单根相互共轭

$\therefore$ 等长的单根相互共轭，继而在同一轨道上

② lemma2：$\langle\alpha,\beta\rangle<0\Rightarrow\alpha+\beta\in\Phi$ （$A(\alpha,\beta)>0$ 亦见）

③ $\forall\alpha,\beta\in\Phi$，有 $\alpha=\sum m_i\alpha_i$，$\beta=\sum n_i\alpha_i$

定义偏序 $\alpha\succ\beta$ iff $m_i\ge n_i$，$\forall i=1,\cdots,l$

则Φ有唯一的极大根θ_l，且Φ有长短根时，θ_l为长根

Pf: (1) 设 $\alpha = \sum_i m_i \alpha_i$ 极大

则 $\langle \alpha, \alpha_i \rangle \geq 0$, $\forall i$, 否则 $\exists i$. s.t. $\alpha + \alpha_i \in \Phi$ 与极大矛盾.

断言 $m_i > 0$, $\forall i$, 否则 $\exists i, i'$ s.t. $m_i \neq 0$, $m_{i'} = 0$, $\langle \alpha_i, \alpha_{i'} \rangle < 0$

则 $\langle \alpha, \alpha_{i'} \rangle = \sum_{j=1}^{l} m_j \cdot \langle \alpha_j, \alpha_{i'} \rangle \leq m_i \cdot \langle \alpha_i, \alpha_{i'} \rangle < 0$ 矛

(2) 下证唯一性.

若 β 也极大, 则 $\beta \pm \alpha \notin \Phi$ 否则与极大矛盾.

因而 $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$, 由 $\beta \neq 0$ 知 $\exists i$ s.t. $\langle \alpha_i, \beta \rangle \neq 0$

于是 $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{l} m_i \langle \alpha_i, \beta \rangle > m_i \cdot \langle \alpha_i, \beta \rangle > 0$ 矛.

(3) 再证 α 为长根

$\forall \alpha' \in \Phi \cap \overline{C}$, 由 α 极大性, $\alpha - \alpha'$ 为若干正根和

于是 $\forall x \in \overline{C}$, $\langle \alpha - \alpha', x \rangle \geq 0$,

特别地, $\langle \alpha - \alpha', \alpha \rangle \geq 0$, $\langle \alpha - \alpha', \alpha' \rangle \geq 0$

于是 $\langle \alpha, \alpha \rangle \geq \langle \alpha', \alpha \rangle \geq \langle \alpha', \alpha' \rangle$ #

推论: 极大根 $\alpha = \sum_i m_i \alpha_i$ 中, $m_i > 0$

Note: 由 $L \cong L(\lambda) = U(N^-) v_\lambda$, 可立得 Φ 关于该偏序有唯一极大根

长根再由上证明.

Note2: θ_s 为 highest 短根

Pf: 令 $\varphi: \Pi \to \Pi^\vee$
$\alpha \mapsto p\alpha$, 若 α 为短根
$\alpha \mapsto \alpha$ 若 α 为长根.

则 $\varphi(\theta_l)$, $\varphi(\theta_s)$ 为对偶根系下的短, 长根.

注意到 φ 对于长根之间, 短根之间是保线性关系的.

$\varphi(\theta_s)$ 为 highest root $\Rightarrow \varphi(\theta_s) - \varphi(\alpha_s) \in \Phi^\vee$, $\alpha_s \in \Phi^+$ 为短根

$\Rightarrow \varphi(\theta_s - \alpha_s) \in \Phi^\vee$.

故 $\theta_s - \alpha_s \in \Phi^+$, 即 θ_s 为唯一的极大短根

Note: 尽管 θ_s 有极大性, $\theta_s - \alpha_s$ 可能不在短根生成根系上.

注解：[1] $h = 1 + ht\,\theta_L$ 称为 L 的 Coxeter Number

[2] h 为 $s_1 \cdots s_l$ 的阶

[3] $h = \frac{|\Phi|}{|\pi|}$ （P_{252} 给出文献）.

5. 考虑 W 对 ρ 作用

① $w(\rho) = \rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha$，其中 α 为 Φ^+ 的子集

Pf：$\forall\, \Omega \subseteq \Phi^+$，$\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha$ 有 $\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\pm\alpha$ 的形式

$\because s_i\, \Phi^+\setminus\{\alpha_i\} = \Phi^+\setminus\{\alpha_i\}$

$\therefore s_i(\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha)$ 仍有该形式，继而 w 作用后仍有该形式。#

②. 若 $\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha \in C$，$\Omega\subseteq\Phi^+$，则 $\Omega = \phi$

Pf：记 $v = \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha$，$\because \rho - v \in C$

$\therefore (\rho - v)(h_i) = \langle \rho - v, \alpha_i^\vee\rangle > 0$，$\forall\, i = 1,\cdots,l$

又 $\because \rho(h_i) = 1$，且 $v \in C$

$\therefore 0 \le v(h_i) < 1$，继而 $v(h_i) = 0$，$\forall\, i$，#

③. $\forall\,\Omega\subseteq\Phi^+$，$\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha \in \bigcup_{\alpha\in\Phi} L_\alpha \cup W\rho$

Pf：反设 $\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha \notin \bigcup_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$，

则 $\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha$ 落在某一 chamber C' 上

$\therefore \exists\, w\in W$ s.t. $w(\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha) \in C$

且 $w(\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha)$ 仍有形式 $\rho - \sum_{\alpha\in\Omega'}\alpha$

由②，立知 $\Omega' = 0$，因而 $w(\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha) = \rho$ #

Note：$\rho - \sum_{\alpha\in\Omega}\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\pm\alpha$ 形式.

Note2：$\forall\, \lambda\in L$，$W_\lambda \cap \overline{C} = \{\mu\}$，且 μ 关于偏序 $<$ 作为 W_λ 上唯一极大元.

6. weyl's denominator 公式.

$$e_\rho \cdot \prod_{\alpha\in\Phi^+}(1 - e_{-\alpha}) = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)\, e_{w(\rho)}，\quad 其中\ \varepsilon_w = (-1)^{l(w)}$$

Pf：[1] 令 $\mathbb{Z}[H^*] = \{ f : H^* \to \mathbb{Z} \mid |\operatorname{supp}(f)| < \infty \}$

则 $\mathbb{Z}[H^*]$ 作成环子空间，且 $\mathbb{Z}[H^*] = \sum_{\lambda\in H^*}\mathbb{Z}\cdot e_\lambda$

$\mathbb{Z}[H^*]$ 可自然视为 $\mathbb{Z}$ 的 W 子模，即 $wf(\lambda) = f(w^{-1}\lambda)$

此时 $w\cdot f\cdot g(\lambda) = \sum_{\mu+\nu=w^{-1}\lambda} f(\mu)\cdot g(\nu)$

$$= \sum_{\mu+\nu=\lambda} f(w^{-1}\mu)\cdot g(w^{-1}\nu)$$

$$= \sum_{\mu+\nu=\lambda} wf(\mu)\cdot wg(\nu)$$

$$= (wf\cdot wg)(\lambda)$$

即 $w(f\cdot g) = wf\cdot wg$,

由 $w e_\lambda(\mu) = e_\lambda(w^{-1}\mu) = e_{w\lambda}(\mu)$ 知 $we_\lambda = e_{w\lambda}$

Note: 讨论 W 模的性质

(2) 令 $\theta: \mathbb{Z}[H^*] \to \mathbb{Z}[H^*]$ 作成加法同态

$$f \mapsto \sum_{w\in W} \varepsilon_w \cdot wf$$

则 $\forall w'\in W$, $\theta w' f = \sum_{w\in W} \varepsilon_w w\cdot w' f$, $u = w\cdot w'$

$$= \varepsilon_{w'}\cdot \sum_{u\in W} \varepsilon_u f$$

$$= \varepsilon_{w'}\cdot \theta f$$

$\therefore \theta\, \varepsilon_w\cdot w = \varepsilon_w\cdot w\,\theta = \theta$

由. $\theta^2 f = \sum_{w\in W} \varepsilon_w w\,\theta f = \sum_{w\in W} \theta f = |W|\cdot\theta f$ 知 $\theta^2 = |W|\cdot\theta$

Note: θ 的性质, $\operatorname{Im} f$ 有某种作用不变性.

(3) $s_i\,\Delta = s_i\, e_\rho \prod_{\alpha\in\Phi^+} (1-e_\alpha)$

$$= e_{\rho-\alpha_i}\Big(\prod_{\alpha\in\Phi^+\setminus\{\alpha_i\}} (1-e_{-\alpha})\Big)\cdot(1-e_{\alpha_i})$$

$$= e_\rho\cdot\Big(\prod_{\alpha\in\Phi^+\setminus\{\alpha_i\}} (1-e_{-\alpha})\Big)\cdot(e_{-\alpha_i}-1)$$

$$= -e_\rho\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+} (1-e_{-\alpha})$$

$$= -\Delta$$

$\therefore w\Delta = \varepsilon_w\Delta$, $\theta\Delta = \sum_{w\in W} \varepsilon_w w\cdot\Delta = \sum_{w\in W}\Delta = |W|\cdot\Delta$

(4) $\Delta = e_\rho\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e_{-\alpha}) = e_\rho\cdot\Big(\sum_{\Omega\subseteq\Phi^+} (-1)^{|\Omega|}\, e_{-\sum_{\alpha\in\Omega}\alpha}\Big)$

$$= \sum_{\Omega\subseteq\Phi^+} (-1)^{|\Omega|}\, e_{\rho-\sum_{\alpha\in\Omega}\alpha}$$

note: $\prod_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{J\subseteq I}\left(\prod_{i\in J} a_i \cdot \prod_{i\in I\setminus J} b_i\right)$

(5) 注意到 $\rho-\sum_{\alpha\in\Omega}\alpha \in \bigcup_{\alpha\in\Phi^+} L_\alpha \,\dot\cup\, W\rho$ (无交并)

若 $v\in L_\alpha$，则 $\varepsilon(w\cdot s_\alpha)\cdot ws_\alpha\cdot v = -\varepsilon_w\cdot w\cdot v$

∴ W 关于 $\{1,s_\alpha\}$ 分为 $\frac{1}{2}|W|$ 个陪集，

每个陪集关于 $\varepsilon_w w v$ 的作用效果抵消.

即有 $\theta e_v = 0$, $\forall v\in\bigcup_{\alpha\in\Phi^+}L_\alpha$

另一方面，若 $w(\rho)=\rho-\sum_{\alpha\in\Omega}\alpha$，则 $\Omega=\{\alpha\in\Phi^+ \mid w^{-1}\alpha<0\}$

于是 $(-1)^{|\Omega|}=(-1)^{l(w)}=\varepsilon_w$

∴ $\theta(\Delta)=\theta\left(\sum_{\Omega\subseteq\Phi^+}(-1)^{|\Omega|}\cdot e_{\rho-\sum_{\alpha\in\Omega}\alpha}\right)$

$=\theta\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\rho}$

∴ $\theta(\Delta)=\theta(\theta e_\rho)=\theta^2 e_\rho = |W|\cdot\theta e_\rho$

又 $\theta(\Delta)=|W|\cdot\Delta$ 得 $\Delta=\theta e_\rho=\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\rho}$.

推论: $\mathrm{ch}\,M(\lambda)=\dfrac{e_{\lambda+\rho}}{\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\rho}}$

Note: 关于 $W\rho$ 与 $\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\pm\alpha\}$

例 A_2: $2\cdot\{\rho-\sum_{\alpha\in\Omega}\alpha\}=\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \underline{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3},\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,$
$\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\ -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ -\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\ \underline{-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3},\ -\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\}$

而 $2\cdot W\rho=\{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\ -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$
$-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\ -\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3\}$

即仅 $0\in\{\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\pm\alpha\}\setminus W\rho$

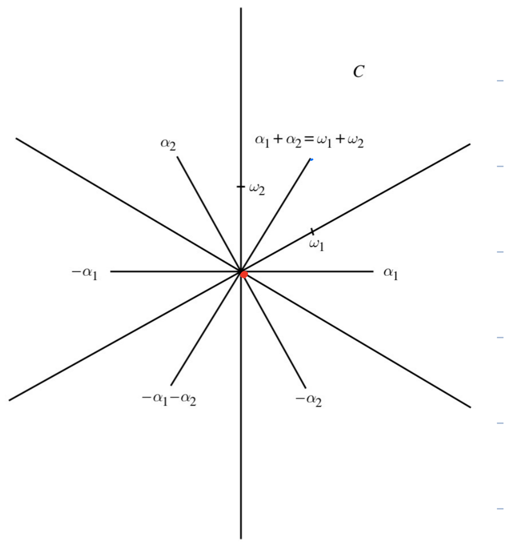


Figure 12.1 Two-dimensional root system type A_2

Note 2: $\{\rho-\sum_{\alpha\in\Omega}\alpha \mid \Omega\subseteq\Phi^+\}$ 中，关于 Ω 有大量元素相同

例如 A_2 中 $-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

但在 $W\rho$ 部分，Ω 被 w 确定，因而不会出现重复

Cpt 12.4. Verma 模的合成因子

1. 一些引理.

① Hilbert 基定理：R 诺特 $\Rightarrow R[x]$ 诺特

Note：若环 R 满足左，右理想的降链条件，则称 R 为 Noetherian

Note2：诺特环的任一理想有限生成

② filtered algebra 与关联 graded 代数

(1) $A=\bigcup_i A_i$ s.t. $A_i \subseteq A_{i+1}$，$A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$，则称 A 为 filtered 代数

$B=\bigoplus_i B_i$ s.t. $B_i \cdot B_j \subseteq B_{i+j}$ 则称 A 为 filtered 代数

(2) 令 $A_{-1}=0$，$B_i=A_i/A_{i-1}$，$i\in \mathbb{Z}_+$，$B=\bigoplus_i B_i$

则 B 关于乘法：$B_i \times B_j \longrightarrow B_{i+j}$

$(u+a_{i-1},\ v+a_{j-1}) \mapsto uv+A_{i+j-1}$

作成 A 关联的 graded 代数.

③. filtered 代数之间的映射

设 $A=\bigcup_{i\geq 0} A_i$，$B=\bigcup_{i\geq 0} B_i$ 为 filtered 代数

记 $A_{-1}=0$，$grA=\bigoplus_{i\geq 0}^{\infty} A_i/A_{i-1}$ 为 A 关联的 graded 代数

$B_{-1}=0$，$grB=\bigoplus_{i\geq 0} B_i/B_{i-1}$ 为 B 关联的 graded 代数

若 $\alpha: A\to B$ s.t. $\alpha(A_i)\subseteq B_i$，则

(1)：$gr\alpha: grA \longrightarrow grB$ 良定义

$a_i+A_{i-1} \mapsto \alpha(a_i)+B_{i-1}$

(2) 若 $\alpha(A_i)=B_i$ 且 α 双射，则 $gr\alpha$ 双射

(3) 若 $gr\alpha$ 双射，则 α 双射

pf：(1) 若 $a_i\in A_{i-1}$，则 $\alpha(a_i)\in B_{i-1}$ 故良定义

(2) ∵ α 可逆，∴ 可定义 $gr\alpha^{-1}$，且恰为 $gr\alpha$ 的逆.

(3) 若 $gr\alpha: A_i/A_{i-1} \longrightarrow B_i/B_{i-1}$ 双射

先证满射

由 $B_0=gr\alpha(A_0)=\alpha(A_0)$ 知，$B_0\subseteq \mathrm{Im}\,\alpha$

若 $B_{i-1}\subseteq \mathrm{Im}\,\alpha$，由 $gr\alpha$ 满知

$B_i = \alpha(A_i) + B_{i-1} \subseteq \mathrm{Im}\,\alpha$. 归纳即证

再证单射.

设 $a \in \ker\alpha$, 若 $a \in A_0$, 由于 $\alpha|_{A_0} = \mathrm{gr}\alpha|_{A_0}$, 必有 $a=0$

若 $a \notin A_0$, 则 $\exists i$ s.t. $a \in A_i$ 但 $a \notin A_{i-1}$

由 $\mathrm{gr}\alpha(a+A_{i-1}) = 0$ 而 $a + A_{i-1} \neq 0$, 与 $\mathrm{gr}\alpha$ 单矛盾. #

Note: $\mathrm{gr}\alpha$ 双射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{gr}\alpha|_{A_i/A_{i-1}}$ 上双射, $\forall i$

但 α 双射 $\underset{\alpha(A_i)=B_i}{\Longleftarrow}$ $\alpha|_{A_i}$ 双射

条件不可少

④. filtered 代数上的理想

设 $A = \bigcup_i A_i$ 为 filtered 代数, $B = \bigoplus_i B_i$ 为其关联 graded 代数

(1) 若 I 为 A 左理想, 则 $\mathrm{gr}I = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (A_i \cap I) + A_{i-1}/A_{i-1}$ 作成 B 左理想

(2) 若 $I_1 \subseteq I_2$, 则 $\mathrm{gr}I_1 \subseteq \mathrm{gr}I_2$ 取等当且仅当 $I_1 = I_2$

(3) 若 B 满足左理想的升链条件, 则 A 亦满足

Pf: (1) $B_j \cdot (A_i \cap I)/A_{i-1} = A_j(A_i \cap I)/A_{i+j-1}$

$\subseteq (A_{i+j} \cap I)/A_{i+j-1} \subseteq \mathrm{gr}I$

(2) 仅证必要性, 即 $I_1 = I_2$

$\because \mathrm{gr}I_1 = \mathrm{gr}I_2$

$\therefore A_i \cap I_1 + A_{i-1} = A_i \cap I_2 + A_{i-1}$, $\forall i$ $\quad$ 又 $I_1 \subseteq I_2$

$\therefore A_i \cap I_2 - A_i \cap I_1 \subseteq A_{i-1} \cap I_2$, $\forall i$

$\therefore A_i \cap I_2 = A_i \cap I_1 + A_{i-1} \cap I_2$, $\forall i$

归纳证 $A_i \cap I_2 = A_i \cap I_1$, $\forall i$

$i=0$ 时, 命题成立. 假设 $i-1$ 时, 命题成立

则 $A_i \cap I_2 = A_i \cap I_1 + A_{i-1} \cap I_2 = A_i \cap I_1 + A_{i-1} \cap I_1 = A_i \cap I_1$

$\therefore A_i \cap I_2 = A_i \cap I_1$, $\forall i$

又 $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, $\therefore I_1 = I_2$

(3) 设有 A 中升链 $I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_r \subseteq \cdots$

则 $\mathrm{gr} I_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{gr} I_r \subseteq \cdots$

当 B 满足相大升链条件时，由(2)知 A 亦满足。#

Note：反过来是显然的，即 A 满足相大升链条件 $\Leftrightarrow$ B 满足 ✓

2. $\mathcal{U}(L)$ 满足关于左理想的相大升链条件.

pf：$\mathcal{U}(L)$ 的 filtered 代数为 $S(L)$

$S(L) \cong \mathbb{C}[z_1, \cdots z_n]$ 为诺特环.

由诺特环性质 + 上一命题 #.

推论：$M(\lambda)$ 满足关于左模的相大升链条件.

pf：$M(\lambda) = \mathcal{U}(L)/K_\lambda$ 为 $\mathcal{U}(L)$ 商模 #

Note：诺特环商环也诺特

3. $M(\lambda)$ 有有限合成因子列 $M(\lambda) = N_0 \supseteq \cdots \supseteq N_r = 0$

其中 N_i 为 N_{i-1} 相大子模，更进一步，$N_i/N_{i+1} \cong L(w\cdot\lambda)$，$\exists w \in W$

$(w\cdot\lambda := w(\lambda+\rho) - \rho)$

pf：(1) ∵ $M(\lambda)$ 满足相大理想升链

∴ $M(\lambda) = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots$，其中 N_i 为 N_{i-1} 相大子模，

只须证其有限性

(2) $M(\lambda)$，N_i，N_i/N_{i+1} 均有关于 H 模的权空间分解

由于 N_i/N_{i+1} 中权有上界 $M(\lambda)$，故其有相大权 μ.

设 $v \in N_i/N_{i+1}$ 为其关于权 μ 的权向量.

则 $N_i/N_{i+1} = \mathcal{U}(N^-)v \cong M(\mu)/J(\mu) = L(\mu)$

(3) 下证 $\mu \in W\cdot\lambda$

考虑 $\mathcal{U}(L)$ 的中心 $Z(L)$ 对 $M(\lambda)$ 作用

$\forall z \in Z(L)$，z 对 N_i/N_{i+1}，$M(\lambda)$，$M(\mu)$ 为相同的标量作用

即 $\chi_\lambda(z) = \chi_\lambda(\mu)$

由上一章 $\chi_\lambda = \chi_\mu$ 的刻画，知 $\exists w \in W$ s.t. $\mu+\rho = w(\lambda+\rho)$

(4) 由于 $|W|<\infty$，μ 的选取有限

同时，$\dim M(\lambda)_\mu = \wp(\lambda-\mu) < \infty$

因而最高权为 μ 的 N_i/N_{i+1} 亦有限. #

推论：$M(\lambda)$ 合成因子列 $M(\lambda)=N_0 \supseteq \cdots \supseteq N_r=0$ 中

$r \leq \sum_{w\in W} \dim M(\lambda)_{w\cdot\lambda}$

key：用 $Z(L)$ 标量作用导出 $\mu = w\cdot\lambda$，继而 μ 有限解.

Cpt 12.5. weyl's 特征标公式

1. recall $M(\lambda)$ 性质

① $M(\lambda)$ 以 $\{\mu\in H^* \mid \mu < \lambda\}$ 为权集，

且 $\dim M(\lambda)_\mu = \wp(\lambda-\mu)$

②. 令 $w\cdot\lambda = w(\lambda+\rho)-\rho$，

则 W 对 H^* 作用满足结合性（但不保加法）

即 $w_1\cdot(w_2\cdot\lambda) = (w_1w_2)\cdot\lambda$

③. $M(\lambda) = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_r = 0$ 为合成序列

(1) 由 $M(\lambda)$ 极大子模唯一性知，$N_1 = J(\lambda)$. $N_0/N_1 = L(\lambda)$

(2) $\forall w\in W$，$M(w\cdot\lambda)$ 的合成因子 $\in \{L(y\cdot\lambda) \mid y\in W$ 且 $y\cdot\lambda < w\cdot\lambda\}$

(3) $ch\, M(w\cdot\lambda) = \sum_{y\in W} a_{wy}\, ch\, L(y\cdot\lambda)$

其中 a_{wy} 为 $M(w\cdot\lambda)$ 的合成因子 $L(y\cdot\lambda)$ 的重数

且由 $L(w\cdot\lambda)$ 仅在 N_0/N_1 出现，知 $a_{ww}=1$

④. $ch\, M(\lambda) = e_\lambda\, ch\, M(0) = e_\lambda \Gamma$

$$= \frac{e_\lambda\cdot e_\rho}{e_\rho\cdot\Gamma^{-1}} = \frac{e_{\lambda+\rho}}{\Delta}$$

其中 $\Delta = e_\rho\cdot\Gamma^{-1} = e_\rho\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e_{-\alpha})$

$$= e_{-\rho}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e_\alpha-1)$$

$$= \sum_{w\in W} \varepsilon_w\cdot e_{w\rho}$$

于是 $w\Delta = \varepsilon_w\Delta$

2. Weyl's character formula

令 $\lambda \in X^+$，则 $ch\,L(\lambda) = \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}}{\Delta} = \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w\in W} \varepsilon_w \cdot e_{w\rho}}$

Pf: (1). $\lambda \in X^+ \Rightarrow \lambda+\rho \in C$，$C$为基本室

$\Rightarrow w\cdot\lambda = w(\lambda+\rho)-\rho$ 为互不相同的根

由 $\lambda - w\cdot\lambda = (\lambda - w\lambda) + (\rho - w\rho)$ 为若干正根和

知 $w\cdot\lambda \prec \lambda$，即 λ 为 $W\cdot\lambda$ 中的唯一极大根

(2) 由 $M(w\cdot\lambda)$ 的合成因子，得

$ch\,M(w\cdot\lambda) = \sum_{y\in W} a_{wy}\, ch\,L(y\cdot\lambda)$，$\forall w\in W$

其中 a_{wy} 为 $M(w\cdot\lambda)$ 的合成因子 $L(y\cdot\lambda)$ 的重数

且 $a_{wy}\in \mathbb{Z}_+$，$a_{ww}=1$，$a_{wy}=0$，若 $y\cdot\lambda \not\prec w\cdot\lambda$

(3) 对 W 排序，使得 $w_1\cdot\lambda \nprec w_2\cdot\lambda$，即偏序增

设 $|W|=m$，则 $w_m=1$，上边等式可整理为

$$\begin{pmatrix} ch\,M(w_1\cdot\lambda) \\ \vdots \\ ch\,M(w_m\cdot\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ch\,L(w_1\cdot\lambda) \\ \vdots \\ ch\,L(w_m\cdot\lambda)\end{pmatrix},$$ 其中 $a_{ij}=a_{w_i w_j}$

则 $(a_{ij})_{m\times m}$ 为下三角阵，主对角线为 1

设 $(b_{ij})_{m\times m} = (a_{ij})_{m\times m}^{-1}$，则

$$\begin{pmatrix} ch\,L(w_1\cdot\lambda) \\ \vdots \\ ch\,L(w_m\cdot\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ch\,M(w_1\cdot\lambda) \\ \vdots \\ ch\,M(w_m\cdot\lambda)\end{pmatrix}$$

于是 $ch\,L(\lambda) = ch\,L(w_m\cdot\lambda) = \sum_{y\in W} C_y\, ch\,M(y\cdot\lambda)$，其中 $C_{w_i} = b_{mi}$

(4) 将 $ch\,M(\lambda) = \frac{e_{\lambda+\rho}}{\Delta}$ 代入，得

$ch\,L(\lambda) = \sum_{y\in W} C_y \cdot \frac{e_{y(\lambda+\rho)}}{\Delta}$，其中 $C_1 = 1$

recall: $\dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu}$，$\forall w\in W$

即 $w\cdot ch\,L(\lambda)=ch\,L(\lambda)$, $\forall w\in W$

又 $w\cdot\Delta=\varepsilon_w\cdot\Delta$

$\therefore ch\,L(\lambda)=w\cdot\sum_{y\in W}C_y\cdot\frac{e_{y(\lambda+\rho)}}{\Delta}=\varepsilon_w\sum_{y\in W}C_y\cdot\frac{e_{wy(\lambda+\rho)}}{\Delta}$

即 $\sum_{y\in W}C_y\cdot\frac{e_{y(\lambda+\rho)}}{\Delta}=\varepsilon_w\sum_{y\in W}C_y\cdot\frac{e_{wy(\lambda+\rho)}}{\Delta}=\varepsilon_w\cdot\sum_{y\in W}C_{w^{-1}y}\cdot\frac{e_{y(\lambda+\rho)}}{\Delta}$

由于 $\{e_{y(\lambda+\rho)}\}$ 线性无关

$\therefore C_y=\varepsilon_w\cdot C_{w^{-1}y}=\varepsilon_y\cdot C_1=\varepsilon_y$

$\therefore ch\,L(\lambda)=\sum_{w\in W}\varepsilon_w\cdot\frac{e_{w(\lambda+\rho)}}{\Delta}$ #

Note: $(b_{ij})_{m\times m}$ 矩阵中，依行由 ε_{w_i} 构成

由于 $w\cdot\lambda\in X^+$ iff $w=1$,

过程中出现的其它 $L(w\cdot\lambda)$ 均为无限维模

key: 考虑 $\{ch\,M(w\cdot\lambda)\mid w\in W\}$,

(1) 借助合成因子与 $\{ch\,L(w\cdot\lambda)\mid w\in W\}$ 建立关系式.

(2) 利用线性关系反解 $ch\,L(\lambda)$

(3) 结合 $M(w\cdot\lambda)$ 的公式，与 $ch\,L(\lambda)$ 上的 w 作用性质

建立新方式，解出线性关系中的未知数.

Note: 先尽可能得到 $ch\,L(\lambda)$ 表达式，再从中构造方式化简

反推1：考虑 $\lambda=0$，则 $ch\,L(0)=e_0$,

即 $L(0)$ 为 L 一维平凡表示

由 $ch\,L(\lambda)=\frac{\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}}{\Delta}$ 得 $\Delta=\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\rho}$.

即给出了 Δ 的另一个证明.

反推2: $ch\,L(\lambda)$ 中，分子与分母均满足 $wa=\varepsilon_w a$.

由此可反推 $w\,ch\,L(\lambda)=ch\,L(\lambda)$

即 $\dim L(\lambda)_\mu=\dim L(\lambda)_{w\mu}$

3、Kostant 乘积公式.

$\lambda\in X^+$, $\mu\in X$, 则 $\dim L(\lambda)_\mu=\sum_{w\in W}\varepsilon_w \wp(w\cdot\lambda-\mu)$

pf:

$\because\ \Delta^{-1}=e_{-\rho}\cdot T=e_{-\rho}\cdot \mathrm{ch}M(0)=e_{-\rho}\cdot\sum_{\nu}\wp(\nu)e_{-\nu}$

$\therefore\ \sum_{\mu}\dim L(\lambda)_\mu e_\mu=\mathrm{ch}L(\lambda)$

$=\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}\cdot\Delta^{-1}$

$=\left(\sum_{w\in W}\varepsilon_w\cdot e_{w(\lambda+\rho)}\right)\cdot e_{-\rho}\cdot\left(\sum_{\nu}\wp(\nu)e_{-\nu}\right)$

$=\sum_{w\in W}\sum_{\nu}\varepsilon_w e_{w\cdot\lambda-\nu}\cdot\wp(\nu)$

比较两侧 e_μ 系数, 得

$\dim L(\lambda)_\mu=\sum_{w\in W}\varepsilon_w\wp(w\cdot\lambda-\mu)$ #

4. Weyl's 特征标公式.

$\forall\lambda\in X^+$, 有 $\dim L(\lambda)=\dfrac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\rho,\alpha\rangle}$

Pf: (1) 令 $\mathcal{R}_0=\sum_{\mu\in X}\mathbb{Z}e_\mu\subseteq\mathbb{Z}[H^*]$ 为 $\mathcal{R}$ 子环

$A=\mathbb{R}[[t]]$ 为形式幂级数环

$\theta_\xi:\mathcal{R}_0\to A$

$e_\mu\mapsto e^{\langle\xi,\mu\rangle\cdot t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\langle\xi,\mu\rangle^k\cdot t^k$

(2) 考虑 θ_ξ 对 $\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\mu}$ 作用

有: $\theta_\xi\left(\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\mu}\right)=\sum_{w\in W}\varepsilon_w e^{\langle\xi,w\mu\rangle\cdot t}$

$=\sum_{w\in W}\varepsilon_w e^{\langle\mu,w^{-1}\xi\rangle\cdot t}$

$=\sum_{w\in W}\varepsilon_w e^{\langle\mu,w\xi\rangle\cdot t}$

$=\theta_\mu\left(\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\xi}\right)$

即 ξ 与 μ 可交换

(3) 特别地，由于 $\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\rho}=\Delta=e_{-\rho}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e_\alpha-1)$

我们有：$\theta_\xi(\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\rho})=\theta_\xi(e_{-\rho}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e_\alpha-1))$

$$=e^{\langle\xi,-\rho\rangle\cdot t}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e^{\langle\xi,\alpha\rangle\cdot t}-1)$$

$$=e^{\langle\xi,-\rho\rangle\cdot t}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\langle\xi,\alpha\rangle\cdot t+\cdots)$$

$$=t^N\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\langle\xi,\alpha\rangle+\underline{\cdots})$$ t次幂≥1

(4) 由 $\mathrm{ch}L(\lambda)=\dfrac{\sum_w\varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}}{\Delta}$ 得

$\Delta\cdot\mathrm{ch}L(\lambda)=\sum_w\varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}$ 为 $\mathcal{X}_0$ 上恒等式

考虑 θ_ρ 对左右二式作用

$$\theta_\rho(\sum_w\varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)})=\theta_{\lambda+\rho}(\sum_w\varepsilon_w e_{w\rho})$$

$$=t^N\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle+\cdots)$$

$$\theta_\rho(\Delta\cdot\mathrm{ch}L(\lambda))=\theta_\rho[(\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\rho})\cdot(\sum_\mu\dim L(\lambda)_\mu e_\mu)]$$

$$=t^N\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(\langle\rho,\alpha\rangle+\cdots)\cdot\sum_\mu\dim L(\lambda)_\mu\cdot e^{\langle\rho,\mu\rangle\cdot t}$$

比较 t^N 系数

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle=\sum_\mu\dim L(\lambda)_\mu\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\rho,\alpha\rangle$$

移项即证.

思路：定义 θ_ξ，将等式 $\sum_\mu\dim L(\lambda)_\mu\cdot e_\mu\cdot\Delta=\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}$

变成新等式，从中化简得证.

注. 构造技巧很神奇！

Cpt 12.6. 完全可约表示

1. 一些构造模的方法 (gtm 009)

① 若 V 为 L 模，则 V^* 为 L 模

具体地 $\forall x\in L$，$x: V^*\to V^*$

$f \mapsto x.f: v \mapsto f(-x.v)$

Note: $x.f(v) = f(-x.v) \Rightarrow e^{\mathrm{ad}x}.f(v) = f(e^{-\mathrm{ad}x}.v)$

② 若 V, W 为 L 模，则 $V\otimes W$ 为 L 模，

具体地. $x.v\otimes w = (x.v)\otimes w + v\otimes(x.w)$

Note: 类似于 L 对 T 的作用

③. $\varphi: V^*\otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ 作成空间同构

$$f\otimes w \mapsto \left(\begin{array}{c} V \to W \\ v \mapsto f(v)\cdot w \end{array}\right)$$

于是 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 作成 L 模，

具体地，$\forall x\in L, \theta = f\otimes w \in \mathrm{Hom}(V, W), v\in V$

$$\begin{aligned}(x.\theta)(v) &= x.(f\otimes w)(v) \\ &= (x.f\otimes w)(v) + (f\otimes x.w)(v) \\ &= f\otimes w(-x.v) + x.(f\otimes w(v)) \\ &= x(\theta(v)) - \theta(x.v)\end{aligned}$$

Note: 特别地，$V=W=L$ 时，$[xy](z) = [x[yz]] - [y[xz]]$

即诱导与 $\mathrm{ad}L$ 作为 L 模相容.

2. 一些简单引理

① L 为半单李代数，则一维 L 模均为平凡模

pf: V 为一维 L 模 $\Rightarrow \forall x, y\in L, v\in V, x.y.v = y.x.v$

$\Rightarrow [xy].v = 0$

$\Rightarrow L^2.v = 0$ #

②. $\{\omega_i\}$ 两两夹角为钝角，因而 $\forall \lambda\in X^+, \mu\in \overline{C}$ (C 为基本室)

有 $\langle\lambda+\mu, \lambda+\mu\rangle \geq \langle\mu, \mu\rangle$. 取等当且仅当 $\lambda = 0$.

3. 完全可约定理

设 L 半单，V 为有限维 L 模，则 V 完全可约

pf: 不妨设 V 可约. 下设 U 为 V 的非平凡子模，只须证 U 有补子模

(1) 若 $\dim U=1$，$\dim V/U=1$，则 $L.V/U=0$，$L.U=0$

$\therefore LV\subseteq U$，$L^2V\subseteq LU\subseteq 0$

又 $L^2=L \Rightarrow L.V\subseteq 0$，即 V 本身为平凡模，

$\Rightarrow V$ 任一子空间为子模

(2) 若 U 不可约，$\dim V/U=1$ 且 $\dim U>1$

由不可约模分类定理，$\exists\lambda\in X^+\setminus\{0\}$ s.t. $U\cong L(\lambda)$，

考虑 $\mathcal{U}(L)$ 的 Casimir 元 c 对 U 作用

由11章结论知，c 对 U 作用为标量作用，

且 $c.u=(\langle\lambda+\rho,\lambda+\rho\rangle-\langle\rho,\rho\rangle)\cdot u$

$V=U\oplus U'$ 为关于 c 的不变子空间分解

由 $\dim V/U=1 \Rightarrow L.V\subseteq U$

$\Rightarrow c.U'\subseteq U$

$\Rightarrow U'$ 为 c 关于特征值 0 的特征子空间

又 $\because c.(L.U')=L.c.U'=0$

$\therefore U'$ 作成 V 的子模，为 U 的补子模

(3). 若 U 未必不可约，$\dim V/U=1$

对 $\dim U$ 归纳，$\dim U=1$ 的情形已证。

归纳中可约情形靠(2)处理. 取 U 非平凡子模 U_0，令 $\pi: V\to V/U_0$ 为自然同态，

$\bar{V}=\pi(V)$，$\bar{U}=\pi(U_0)$ 为 $\bar{V}$ 子模 且 $\dim\bar{V}/\bar{U}=1$

由归纳法，得 $\bar{V}=\bar{U}\oplus\bar{V_1}$ 为 L 模分解

令 $V_1=\pi^{-1}(\bar{V_1})$，则 U_0 为 V_1 且 $\dim V_1/U_0=1$

由归纳法，得 $V_1=U_0\oplus U'$ 为 L 模分解

于是 $V=U\oplus U'$ 为 L 模分解

Note: $V=U\oplus ?\xrightarrow{\text{下降}}\bar{V}=\bar{U}\oplus\bar{V_1}\xrightarrow{\text{原回来}}V_1=U_0\oplus U'$ 得到补模

(4). 最后，讨论一般情形.

$\mathrm{Hom}(V,U) \cong V^* \otimes U$ 作成 L 模

令 $S = \{ \theta \in \mathrm{Hom}(V,U) \mid \theta|_U$ 为标量作用$\}$

$\because \forall x \in L, (x.\theta)(u) = x(\theta(u)) - \theta(x.u) = 0$

$\therefore S$ 作成 $\mathrm{Hom}(V,U)$ 子模

令 $T = \{ \theta \in S \mid \theta|_U = 0 \}$ 作成 S 子模.

则 $\dim S/T = 1$

Note: 一方面, 设 $V = U \oplus U_0$ 为子空间分解

则 $\theta: V \to V/U_0$ s.t. $\theta|_U = 1_U$ 故 $S \neq T$

另一方面, $\forall \theta' \in S$, 设 $\theta'|_U = k \cdot 1_U$, 则 $\theta' - k \cdot \theta \in T$. #

由(3)讨论, $S = T \oplus T'$ 为子模分解

设 $T' = \mathrm{span}\{f\}$, 不妨设 $f|_U = 1_U$

$\dim T' = 1 \Rightarrow L.T' = 0$

$\Rightarrow \forall x \in L, (x.f)(v) = x(f(v)) - f(xv) = 0$

$\Rightarrow f$ 为 L 模同态

$\Rightarrow U' = \ker f$ 为 L 子模

由 f 满射 $\Rightarrow V = U + U'$

由 $f|_U = 1_U \Rightarrow U \cap U' = \emptyset$

$\Rightarrow V = U \oplus U'$ #

Note: $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, f 为模同态 $\Leftrightarrow L.f = 0$!!

证明思路即为构造 f s.t. $U \hookrightarrow V \xrightarrow{f} U$ 作成恒等映射.

(直和 $\Rightarrow$ 同调分裂扩张 $\Rightarrow$ 构造 f.)

* Note2: 证明中引用前边的关键内容在第2点

$\chi_\lambda(c) = \langle \lambda+\rho, \lambda+\rho \rangle - \langle \rho, \rho \rangle$.

推论: $\forall \rho: L \to gl(V)$ 为表示, $x \in L$ 幂零 $\Leftrightarrow \rho(x)$ 幂零.

$x \in L$ 可对角化 $\Leftrightarrow \rho(x)$ 可对角化

注：这个命题很有用，但涉及 Jordan 分解的性质，后边再讨论。

4. $L(\lambda)\otimes L(\mu)$ 作成 L模，其不可约分解有一般公式
(Steinberg's multiplicity formula)

$\forall \lambda,\mu\in X^+$，设 $L(\lambda)\otimes L(\mu)=\sum_{\nu\in X^+} c_{\lambda\mu\nu}L(\nu)$

则
$$c_{\lambda\mu\nu}=\sum_{w,w'\in W}\varepsilon_w\varepsilon_{w'}\mathcal{P}(w\cdot\lambda+w'\cdot\mu-\nu)$$

Pf: $chL(\lambda)\cdot chL(\mu)=ch(L(\lambda)\otimes L(\mu))$

$=\sum_{\nu\in X^+} c_{\lambda\mu\nu}L(\nu)$

将 $chL(\lambda)=\frac{\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}}{\Delta}$，$chL(\mu)=\sum_{\mu\in H^*}\dim L(\lambda)_\mu e_\mu$ 和 $L(\nu)=\frac{\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w(\nu+\rho)}}{\Delta}$ 代入，

得 $\left(\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}\right)\cdot\left(\sum_{\xi\in X}\dim L(\mu)_\xi\, e_\xi\right)=\sum_{\nu\in X^+}c_{\lambda\mu\nu}\cdot\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w(\nu+\rho)}$

化简得 $\sum_{w\in W}\sum_{\xi\in H^*}\varepsilon_w\cdot\dim L(\mu)_\xi\cdot e_{w(\lambda+\rho)+\xi}=\sum_{\nu\in X^+}\sum_{w\in W}\varepsilon_w c_{\lambda\mu\nu}e_{w(\nu+\rho)}$

$\nu\in X^+\Rightarrow \nu+\rho\in$ 基本室 C

$\Rightarrow w(\nu+\rho)$ 互不相同，

$\Rightarrow \{e_{w(\nu+\rho)}\mid\forall\nu,w\}$ 线性无关

比较两侧 $e_{\nu+\rho}$ 的系数，得

$$c_{\lambda\mu\nu}=\sum_{w\in W}\sum_{\substack{\xi\in X\\ w(\lambda+\rho)+\xi=\nu+\rho}}\varepsilon_w\dim L(\mu)_\xi$$

$$=\sum_{w\in W}\varepsilon_w\dim L(\mu)_{\nu+\rho-w(\lambda+\rho)}$$

$$=\sum_{w\in W}\varepsilon_w\dim L(\mu)_{\nu-w\cdot\lambda}$$

由公式 $\dim L(\lambda)_\mu=\sum_{w\in W}\varepsilon_w\mathcal{P}(w\cdot\lambda-\mu)$

得 $c_{\lambda\mu\nu}=\sum_{w\in W}\varepsilon_w\sum_{w'\in W}\varepsilon_{w'}\mathcal{P}(w'\cdot\mu-(\nu-w\cdot\lambda))$

$=\sum_{w,w'\in W}\varepsilon_{w\cdot w'}\mathcal{P}(w'\cdot\mu+w\cdot\lambda-\nu)$ #

特别地，A_1 情形中，$W=\{1,s\}$，$\Phi^+=\{\alpha\}$，$\lambda=\frac{1}{2}\alpha$

$$L(m\lambda)\otimes L(n\lambda)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}C_k\cdot L(k\lambda)$$

不妨设 $m \geq n$，则 $C_k = \beta\left(\frac{m+n-k}{2} \cdot \alpha\right) - \beta\left(\frac{m-n-k-2}{2}\alpha\right)$

$C_k \neq 0$ 当且仅当 $\frac{m+n-k}{2} \in \mathbb{Z}_+$ 且 $\frac{m-n-k-2}{2} \notin \mathbb{Z}_+$

即 $k = m-n, m-n+2, \cdots, m+n$