Cpt13. 单李代数基本模

recall: Cpt12 主要结论

① $\mathrm{ch}\,M(\lambda) = e_\lambda\cdot\Gamma$，其中 $\Gamma = \mathrm{ch}\,M(0) = \sum_{\nu\in\Gamma^+}\mathcal{P}(\nu)e_{-\nu}$
$= \prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e_\alpha)^{-1}$

② $\mathrm{ch}\,M(\lambda) = \frac{e_{\lambda+\rho}}{\Delta}$，其中 $\Delta = e_\rho\cdot\Gamma^{-1} = e_{-\rho}\cdot\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e_\alpha-1)$
$= \sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\rho}$

③ $\mathrm{ch}\,L(\lambda) = \frac{\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w(\lambda+\rho)}}{\sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\rho}} = \sum_{w\in W}\varepsilon_w e_{w\cdot\lambda}\cdot\Gamma$

④ $\dim L(\lambda)_\mu = \sum_{w\in W}\varepsilon_w\mathcal{P}(w\cdot\lambda-\mu)$

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\prod_{\alpha\in\Phi^+}\langle\rho,\alpha\rangle}$$

Cpt 13.1. weyl 维数公式的简化形式

1. 设 $\lambda = \sum_{i=1}^{l} m_i\lambda_i \in \Lambda^+$ 为支配权，其中 λ_i 为基本支配权

则 $\dim L(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha$，其中 $d_\alpha = \frac{\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\langle\rho,\alpha\rangle}$

设 $\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$，则
$$d_\alpha = \frac{\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\langle\rho,\alpha\rangle} = \frac{\langle\sum_{i=1}^{l} m_i\lambda_i + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i, \sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i\rangle}{\langle\sum_{i=1}^{l}\lambda_i, \sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i\rangle}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{l}(m_i+1)\cdot k_i\cdot\frac{1}{2}\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{\sum_{i=1}^{l}k_i\cdot\frac{1}{2}\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{l}(m_i+1)\cdot k_i\cdot w_i}{\sum_{i=1}^{l}k_i w_i},$$

即 $d_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{l}(m_i+1)\cdot k_i\cdot w_i}{\sum_{i=1}^{l}k_i w_i}$，$w_i = \frac{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_s,\alpha_s\rangle}$

Note: 若设 $\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i^\vee$，且可省去 w_i 的讨论！

Cpt 13.2. A_l 的基本模

1. 设 $\{\lambda_i\}$ 为 A_l 的基本支配权，则 $\dim L(\lambda_j) = C_{l+1}^{j}$

Pf:

A_l 中，α_i 与 $\alpha_i^\vee$ 可看作等同，因而上边 w_i 可忽略。

即 $\dim L(w_j) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha$，$d_\alpha = \dfrac{\sum_{i=1}^{l} k_i + k_j}{\sum_{i=1}^{l} k_i}$，$\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$

当 α 的单根和展开中不含 α_j 时，$d_\alpha = 1$

故仅需讨论展开式含 α_j 的情形

即 $\alpha = \alpha_i + \cdots + \alpha_j + \cdots + \alpha_k$，$i \le j \le k$ 时。

此时 $d_\alpha = \dfrac{k-i+2}{k-i+1}$

于是

$$\dim L(w_j) = \prod_{1\le i\le j}^{i} \prod_{j\le k\le l}^{k} \frac{k-i+2}{k-i+1}$$

$$= \prod_{1\le i\le j}^{i} \left(\frac{j-i+2}{j-i+1}\cdot\frac{j-i+3}{j-i+2}\cdots\cdots\frac{l-i+2}{l-i+1}\right)$$

$$= \prod_{1\le i\le j}^{i} \frac{l-i+2}{j-i+1}$$

$$= \frac{l+1}{j}\cdot\frac{l}{j-1}\cdot\cdots\cdot\frac{l-j+2}{1}$$

$$= \frac{(l+1)!}{j!\cdot(l-j+1)!}$$

$$= C_{l+1}^{j}$$

2. 考虑 A_l 的自然表示，即 $\varphi: L \to sl_{l+1}(C)$

设 V 为对应 L 模，以 $\{v_i\}_{i=1}^{l+1}$ 为自然基

则 v_i 为 V 关于 μ_i 的权向量，

其中 $\mu_i: H \longrightarrow C$

$$\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{l+1}\end{pmatrix} \mapsto t_i$$

由 $\alpha_i = \mu_i - \mu_{i+1}$，得

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_l\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_{l+1}\end{pmatrix}$$，过渡阵行列式为 $n+1\neq 0$

又 $$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_l\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}$$，$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ & & -1 & 1\end{pmatrix}$ 为 Cartan 阵

得 $$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_{l+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1\\ & & -1 & 2\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}$$

$\because \mu_i-\mu_{i+1}=\alpha_i$

$\therefore \mu_{l+1}<\mu_l<\cdots<\mu_1=\lambda_1$

$\therefore$ 其含最高权为 λ_1 的不可约模

又 $\because \dim V=l+1=\dim L(\lambda_1)$，

$\therefore V\cong L(\lambda_1)$ #

Cpt 13.3. exterior powers of modules

recall：张量代数相关

① $T(V)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}T^n(V)$ 为 V 上张量代数，设 $\dim V=m$

则 $\dim T^n(V)=k^n$，下设 V 以 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^m$ 为基

② (1) 令 I 为 $\{v\otimes w-w\otimes v\mid v,w\in V\}$ 生成 $T(V)$ 理想

则 $I=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(T^n(V)\cap I)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}K_s^n$

其中 $K_s^n=\{v_1\otimes\cdots\otimes v_n-v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(n)}\mid \sigma\in S_n,\ v_i\in V\}$

(2) 令 $S(V)=T(V)/I=\bigoplus_{n=0}^{\infty}S^n(V)=\mathbb{C}\cdot 1\oplus V\oplus\sum_{n=2}^{\infty}S^n(V)$

其中 $S^n(V)$ 以 $\{\varepsilon_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{i_n}+I \mid i_1\le\cdots\le i_n\}$ 为基.

$\dim S^n(V) = C_{m+n+1}^n$

③ (1) 令 J 为 $\{v\otimes v \mid v\in V\}$ 生成的 $T(V)$ 理想.

注意到 $v\otimes v=0 \Rightarrow (v+w)\otimes(v+w)=0$

$\Rightarrow v\otimes w + w\otimes v = 0$

而 $v\otimes w + v\otimes w = 0 \Rightarrow v\otimes v + v\otimes v = 0$

$\overset{\mathrm{char}F=0}{\Longrightarrow} v\otimes v = 0$

$\therefore$ J 亦为 $\{v\otimes w + w\otimes v \mid v,w\in V\}$ 生成的 $T(V)$ 理想.

(2) 于是 $J = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(T^n(V)\cap J) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_E^n$

其中 $K_E^n = \{v_1\otimes\cdots\otimes v_n \mid \{v_i\}$ 中恰有 2 个重复, $v_i\in V\}$

(3) 令 $\Lambda(V) = T(V)/J = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\Lambda^n(V) = C.1\oplus V\oplus\sum_{n=2}^{m}\Lambda^n(V)$

其中 $\Lambda^n(V)$ 以 $\{\varepsilon_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varepsilon_{i_n}+J \mid i_1<i_2<\cdots<i_n\}$ 为基, $n\le m$

$\dim\Lambda^n(V) = C_m^n$, $\dim\Lambda(V) = 2^n$

1. V 为 L 模, $\Lambda(V)$ 作成 L 模 且 称为 V 的外代数.

此时 $\Lambda(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\Lambda^n(V) = C.1\oplus V\oplus\sum_{n=2}^{m}\Lambda^n(V)$ 为 L 模分解

记 $v\wedge w = v\otimes w + J$ 为 v,w 的外积,

2. 设 V 为单李代数 L 上的有限维模.

则 $\Lambda^k V$ 的权 $\{\sum_{i=1}^{k}\mu_i \mid \mu_i$ 为 V 的权$\}$

pf: V 取权空间分解的基, $v_i\in V_{\mu_i}$

$h.(v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} v_{i_1}\wedge\cdots\wedge(h.v_{i_j})\wedge\cdots\wedge v_{i_k} = \sum_{j=1}^{k}\mu_{i_j}(h)(v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_k})$ #

3. V 为 A_l 李代数 L 的自然模

则 $L(w_i) = \Lambda^i(V)$, $\{w_i\}$ 为基本模

Note: 有时为避免歧义, w_i 用 λ_i 表示.

pf: $\mu_i: \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{l+1}\end{pmatrix} \longmapsto \lambda_i$ 构成 V 的所有权

且 $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{l+1}$

由上一命题可 $\Lambda^k(V)$ 是性质

$\Lambda^k(V)$ 的最高权向量为 $\mu_1+\cdots+\mu_k = w_k$

又∵ $\dim L(w_k) = C_{l+1}^k = \dim \Lambda^k V$

∴ $\Lambda^k(V)$ 不可约 且同构于 $L(w_k)$

Cpt 13.4. B_l, D_l 的基本模

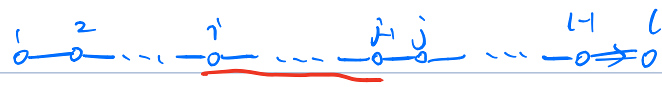
1. B_l 维数信息

① recall B_l 根系, $\{\beta_i\}_{i=1}^{l}$ 为标准正交基

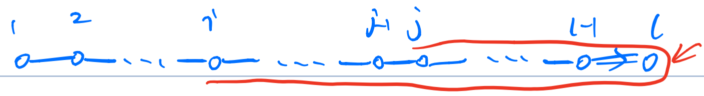
(1) $\beta_i = \alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_l$, $1\le i\le l$

Dynkin 图 

(2) $\beta_i-\beta_j = \alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots\alpha_{j-1}$, $1\le i<j\le l$

Dynkin 图 

(3) $\beta_i+\beta_j = \alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots\alpha_{j-1}+2\alpha_j+2\alpha_{j+1}+\cdots+2\alpha_l$, $1\le i<j\le l$

Dynkin 图 

= 重

② recall 第一节

$\dim L(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha$,

$\lambda = \sum_{i=1}^{l} m_i\lambda_i$, $\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$, $w_i = \frac{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_s,\alpha_s\rangle}$, α_s 为短根, 时.

$$d_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{l}(m_i+1)\cdot k_i\cdot w_i}{\sum_{i=1}^{l} k_iw_i} = 1+\frac{\sum_{i=1}^{l} m_ik_iw_i}{\sum_{i=1}^{l} k_iw_i}$$

其中 $w_1 = w_2 = \cdots = w_{l-1} = 2$, $w_l = 1$

③. $\dim L(w_j) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha$, $j\le l-1$

$\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$ 时, $d_\alpha = 1+\frac{2\cdot k_j}{2\cdot\sum_{i=1}^{l-1}k_i+k_l}$, $j\le l-1$

当 α 单根分解不含 α_j 项时, $d_\alpha = 1$.

于是只须考虑 α 取值为下面情形

(1) $I_1=\{\alpha_i+\cdots+\alpha_j+\cdots+\alpha_k,\ 1\le i\le j,\ j\le k\le l-1\}$

$$\prod_{\alpha\in I_1} d_\alpha=\prod_{1\le i\le j}\cdot\prod_{j\le k\le l-1}\frac{k-i+\overset{1+m}{2}}{k-i+1}=\frac{l!}{j!\cdot(l-j)!}$$

(2) $I_2=\{\alpha_i+\cdots+\alpha_j+\cdots+\alpha_l,\ 1\le i\le j\}$

$$\prod_{\alpha\in I_2} d_\alpha=\prod_{1\le i\le j}\frac{2l-2i+\overset{1+2m}{3}}{2l-2i+1}=\frac{2l+1}{2l-2j+1}$$

(3) $I_3=\{\alpha_i+\cdots+\alpha_j+\cdots+\alpha_{k-1}+2\alpha_k+\cdots+2\alpha_l,\ 1\le i\le j,\ j+1\le k\le l\}$

$$\prod_{\alpha\in I_3} d_\alpha=\prod_{1\le i\le j}\cdot\prod_{j+1\le k\le l}\cdot\frac{2l-k-i+\overset{1+m}{2}}{2l-k-i+1}$$

$$=\prod_{1\le i\le j}\frac{2l-j-i+1}{l-i+1}$$

$$=\frac{(2l-j)\cdot\cdots\cdots(2l-2j+1)}{l\cdot(l-1)\cdot\cdots\cdot(l-j+1)}$$

$$=\frac{(2l-j)\cdot\cdots\cdots(l+1)}{(2l-2j)\cdot\cdots\cdot(l-j+1)}$$

(4) $I_4=\{\alpha_i+\cdots+\alpha_{k-1}+2\alpha_k+\cdots+2\alpha_j+\cdots+2\alpha_l,\ 2\le k\le j,\ 1\le i\le k-1\}$

$$\prod_{\alpha\in I_4} d_\alpha=\prod_{2\le k\le j}\cdot\prod_{1\le i\le k-1}\frac{2l-k-i+\overset{1+2m}{3}}{2l-k-i+1}$$

$$=\prod_{2\le k\le j}\cdot\frac{(2l-k+2)(2l-k+1)}{(2l-2k+3)(2l-2k+2)}\qquad 2l-k-(k-1)+1$$

$$=\frac{2l\cdot(2l-1)^2\cdot\cdots\cdot(2l-j+2)^2\cdot(2l-j+1)}{(2l-1)\cdot(2l-2)\cdot\cdots\cdot(2l-2j+3)\cdot(2l-2j+2)}$$

$$=\frac{2l\cdot(2l-1)\cdot\cdots\cdot(2l-j+1)}{(2l-j+1)\cdot\cdots\cdot(2l-2j+2)}$$

$\therefore$ $$\dim L(w_j)=\prod_{\alpha\in I_1\cup I_2\cup I_3\cup I_4} d_\alpha=\frac{(2l+1)!}{(2l-j+1)!\cdot j!}=C_{2l+1}^{j}$$

②. $\dim L(w_l)=\prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha$, $j\le l-1$

此时，仅须考虑 α 为如下情形

(1) $I_1 = \{\alpha_i + \cdots + \alpha_l \mid 1\le i\le l\}$

$$\prod_{\alpha\in I_1} d_\alpha = \prod_{1\le i\le l} \frac{2l-2i+\overset{1+m}{2}}{2l-2i+1} = \frac{2l!!}{(2l-1)!!}$$

(2) $I_2 = \{\alpha_i+\cdots+\alpha_{k-1}+2\alpha_k+\cdots+2\alpha_l \mid 1\le i<k\le l\}$

$$\prod_{\alpha\in I_2} d_\alpha = \prod^{i}_{1\le i\le l-1}\cdot\prod^{k}_{i+1\le k\le l}\frac{2l-i-k+\overset{1+m}{2}}{2l-i-k+1}$$

$$= \prod^{i}_{1\le i\le l-1}\frac{2l-2i+1}{l-i+1}$$

$$= \frac{(2l-1)!!}{l\cdot(l-1)\cdot\cdots\cdot 2}$$

$$\therefore \dim L(w_l) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha = \frac{(2l)!!}{l!} = 2^l$$

综上,

$$\overset{C^1_{2l+1}}{\circ}-\overset{C^2_{2l+1}}{\circ}-\cdots-\overset{C^{l-1}_{2l+1}}{\circ}\Rightarrow\overset{2^l}{\circ}$$

2. B_l 基本模 ($j\le l-1$)

令 V 为 B_l 的自然表示, 即 $\dim V = 2l+1$

则 $L(w_j)\cong \wedge^j V$, $\forall 1\le j\le l-1$

Pf: 令

$$\mu_i: \begin{pmatrix} 0 &&&&&& \\ & \lambda_1 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& \lambda_l &&& \\ &&&& \lambda_1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& \lambda_l \end{pmatrix} \mapsto \lambda_i$$

则 $\{\pm\mu_i\}\cup\{0\}$ 构成 V 的所有权

且由 $\mu_i-\mu_{i+1}=\alpha_i$, $\mu_l=\alpha_l$ 知.

$$-\mu_1<-\mu_2<\cdots-\mu_l<0<\mu_l\cdots<\mu_2<\mu_1$$

$\therefore \wedge^j V$ 的最高权为 $\mu_1+\cdots+\mu_j$

由 $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ &1&\cdots&1\\ &&\ddots&\vdots\\ &&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_l\end{pmatrix}$

由 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -2\\ & & & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_l\end{pmatrix}$

得 $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \quad 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_l\end{pmatrix}$

$\therefore \mu_1+\cdots+\mu_j=\begin{cases} w_j, & j<l\\ 2w_l, & j=l\end{cases}$

又 $\dim L(w_j)=\dim \Lambda^j V = C_{2l+1}^{j}$, $j<l$

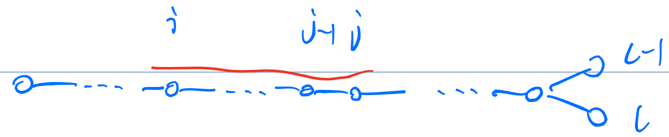
$\therefore L(w_j)\cong \Lambda^j V$, $j<l$

3. D_l 维数信息

① recall: B_l 根系，$\{\beta_i\}_{i=1}^{l}$ 为标准正交基

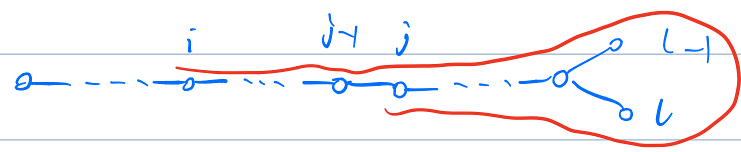
(1). $\beta_i-\beta_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1}$, $1\le i<j\le l$

Dynkin 图：



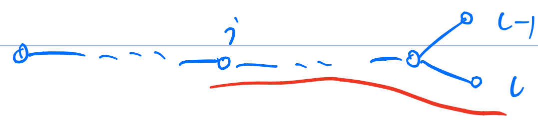
(2) $\beta_i+\beta_j=\alpha_i+\cdots+\alpha_{l-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_l+\alpha_{l-2}+\cdots+\alpha_j$, $1\le i<j\le l-1$

Dynkin 图：



(3) $\beta_i+\beta_l=\alpha_i+\cdots+\alpha_{l-2}+\alpha_l$, $1\le i\le l-2$

Dynkin 图：



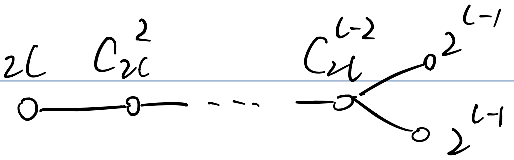
② $\dim L(w_j)=\prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha$.

设 $\alpha=\sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i$，则 $d_\alpha=\dfrac{\sum_{i=1}^{l}k_i+k_j}{\sum_{i=1}^{l}k_i}$

类似 B_l 讨论，（纯验算），

对 j 分三类讨论：$1\le j\le l-2$，$j=l-2$，$j=l$

主要结论如下



4. D_l 基本模 ($j \le l-2$)

令 V 为 D_l 的自然表示，即 $\dim V = 2l$

则 $L(w_j) \cong \Lambda^j V$, $\forall\, 1 \le j \le l-2$

Pf: 令 $\mu_i: \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_l & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_l \end{pmatrix} \mapsto \lambda_i$，则 $\{\pm\mu_i\}$ 组成 V 所有权.

且 $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{l-1} > \begin{matrix}\mu_l \\ -\mu_l\end{matrix} > -\mu_l > \cdots > -\mu_1$

由

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 & 1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_l \end{pmatrix}$$

于是 $\Lambda^j V$ 的最高权为 $\mu_1 + \cdots + \mu_j = w_j$, $j \le l-2$

又 $\dim L(w_j) = \dim \Lambda^j V = C_{2l}^j$, $j \le l-2$

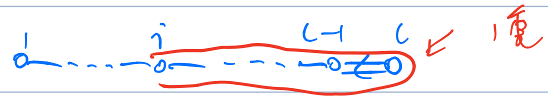
$\therefore L(w_j) \cong \Lambda^j V$, $j \le l-2$.

Cpt 13.6 C_l 基本模

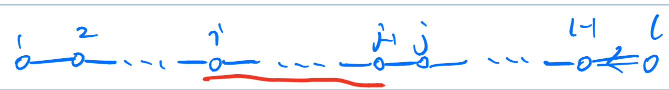
1. C_l 维数

① recall: C_l 根系, $\{\beta_i\}_{i=1}^l$ 为规范正交基

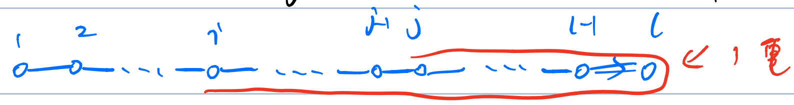
(1) $2\beta_i = 2\alpha_i + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$, $1 \le i \le l$

Dynkin 图 

(2) $\beta_i - \beta_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots \alpha_{j-1}$, $1 \le i < j \le l$

Dynkin 图 

(3) $\beta_i+\beta_j=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots\alpha_{j-1}+2\alpha_j+\cdots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l,\ 1\le i<j\le l$

Dynkin 图 

② $\dim L(w_j)=\prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha.$

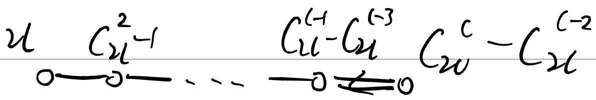
设 $\alpha=\sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i$，则 $d_\alpha=\begin{cases}\dfrac{\sum_{i=1}^{l}k_i+k_j}{\sum_{i=1}^{l}k_i}, & j<l-1\\[2ex] \dfrac{2\sum_{i=1}^{l}k_i+k_j}{2\sum_{i=1}^{l}k_i}, & j=l\end{cases}$

类似 B_l 讨论，(纯验算)，

对 j 分两类讨论：$1\le j\le l-1$，$j=l$

结论如下：

$$\dim L(w_j)=C_{2l}^{j}-C_{2l}^{j-2},\quad j=1,\cdots,l$$

Dynkin 图：

2. C_l 基本模 $(j=1)$

令 V 为 D_l 的自然表示，即 $\dim V=2l$

则 $L(w_1)\cong V$

Pf：令 $\mu_i:\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&\lambda_l&&&\\&&&-\lambda_1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-\lambda_l\end{pmatrix}\longmapsto\lambda_i$，则 $\{\pm\mu_i\}$ 作成 V 所有权.

且 $\mu_1>\mu_2>\cdots\mu_l>0>-\mu_l>\cdots>-\mu_1$

由 $$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&\frac12\\ &1&\cdots&\frac12\\ &&\ddots&\vdots\\ &&&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_l\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&-1&2&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&-1\\&&&-1\ \ 2&-1\\&&&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_l\end{pmatrix}$$

得 $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \cdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ \cdots\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\vdots\\ \vdots\\ \mu_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\\ \vdots\\ w_l\end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\Lambda^j V$ 的最高权为 $\mu_1+\cdots+\mu_j = w_j$，$j \le l$

特别地，由于 $\dim \Lambda^1 V = 2l = \dim L(w_1)$

$\therefore$ $L(w_1) \cong \Lambda^1 V = V$.

以上，给出 A–D 系基本模的维数公式.

以下 A_l 所有基本模构造

B_l 的基本模 $L(w_j)$，$j \le l-1$

C_l 的基本模 $L(w_1)$

D_l 的基本模 $L(w_j)$，$j \le l-2$

这部分模均通过自然表示的外积构造

具体地：A_l 中 $\Lambda^k(V) \cong L(w_k)$，$\Lambda^{l+1}(V) \cong L(0)$

B_l 中 $\Lambda^k(V) \cong L(w_k)$，$k \le l-1$

$\Lambda^l(V)$ 以 $2w_l$ 为最高权

C_l 中 $\Lambda^1(V) = V \cong L(w_1)$

$\Lambda^k(V)$ 以 w_i 为最高权（但未必不可约）

D_l 中 $\Lambda^k(V) \cong L(w_k)$，$k \le l-2$

$\Lambda^{l-1}(V)$ 以 $w_l + w_{l-1}$ 为最高权

$\Lambda^l(V)$ 以 $w_l - w_{l-1}$ 为最高权

余下情形需用一些特殊方法构造.

即第5节，Clifford代数与spin代数 $\Rightarrow B_l, D_l$

第7节，contraction maps $\Rightarrow C_l$

以及第8节，给出有限维的模构造

Cpt13.5 clifford 代数与 spin 模

本节构造 B_l, D_l 条下情形的基本模

1. clifford 代数

① $(,): V\times V\to C$ 为对称双线性映射

令 $T(V)$ 为 V 上张量代数,

J 为 $\{v\otimes v-(v,v).1\}$ 生成的 $T(V)$ 双边理想.

或者作为由 $\{v\otimes v'+v'\otimes v-2(v,v').1\}$ 生成

$C(V)=T(V)/J$ 称为 V 的 clifford 代数

② V 以 $\{v_i\}_{i=1}^n$ 为基 $\Rightarrow$ J 由 $\begin{cases} v_i\otimes v_i-(v_i,v_i).1 \\ v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i-2(v_i,v_j).1,\ i<j \end{cases}$ 生成

③ $(C.1\oplus V)\cap J=0 \Rightarrow C.1, V$ 可视为 $C(V)$ 子空间

$\Rightarrow C(V)$ 为 $\{v_i\}_{i=1}^n, 1$ 生成的代数

④. $C(V)$ 有一组基 $\{v_{i_1}\cdots v_{i_k}\mid 0\le i_1<\cdots<i_k\le n\}$

故 $\dim C(V)=2^n$

Note: 由 $v_i\otimes v_i-(v_i,v_i).1$ 消除重复

由 $v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i-2(v_i,v_j).1,\ i<j$ 实现换序

⑤. 令 $T(V)^+=\bigoplus_{i\text{偶}}T^iV$, $T(V)^-=\bigoplus_{i\text{奇}}T^iV$

则 $T(V)=T(V)^+\oplus T(V)^-$, $J=(J\cap T(V)^+)\oplus(J\cap T(V)^-)$

令 $C(V)^+=T(V)^+/(J\cap T(V)^+)$, $C(V)^-=T(V)^-/(J\cap T(V)^-)$

则 $C(V)=C(V)^+\oplus C(V)^-$, 且 $\dim C(V)^+=\dim C(V)^-=2^{n-1}$

且 $C(V)^+$ 以 $\{v_{i_1}\cdots v_{i_k}\mid 0\le i_1<\cdots<i_k\le n, k\text{ 偶}\}$ 为基.

$C(V)^-$ 以 $\{v_{i_1}\cdots v_{i_k}\mid 0\le i_1<\cdots<i_k\le n, k\text{ 奇}\}$ 为基.

Pf: $\forall x\in T^rV, y\in T^sV$, $v\otimes v-(v,v).1\in J$

有 $x\otimes(v\otimes v-(v,v).1)\otimes y\in\begin{cases} T(V)^+, & \text{若 } r+s\text{ 偶} \\ T(V)^-, & \text{若 } r+s\text{ 奇} \end{cases}$ #

Note: 对称, 外代上, 了与了同步分解, Clifford 则为奇偶同步.

2. Clifford 上的李代数

$C(V) = [C(V)]$ 作成李代数

① 引理: (1) $x,y,z\in V \Rightarrow [[xy]z] = 4(y,z).x - 4(x,z).y$

(2) $x,y,z,w\in V \Rightarrow [[xy],[zw]] = 4(y,z)[xw] - 4(y,w)[xz]$
$+ 4(xw)[yz] - 4(x,z)[yw]$

Pf: (1) $[[xy]z] = xyz - yxz - zxy + zyx$

$= -2(x,z)y + 2(yz).x - 2(xz).y + 2(yz).x$

$= -4(xz).y + 4(yz).x$

(2) $[[xy],[zw]] = [[[xy],z],w] + [z[[xy],w]] \overset{(1)}{=}$

$= 4(y,z)[xw] - 4(x,z)[y,w] + 4(y,w)[zx] - 4(x,w)[zy]$ #

② 令 $L = \mathrm{span}\{[v_iv_j] \mid i<j\}$

由 $[v_iv_j] = v_iv_j - v_jv_i = 2v_iv_j - 2(v_i,v_j)1$

知, $\{[v_iv_j] \mid i<j\}$ 线性无关, 故 $\dim L = \frac{1}{2}n(n-1)$

由引理(2)知, L 作成 $C(V)$ 的子李代数.

③ 由引理(1)知, V 作成 L 模

此外, V上双线性型非退化时, V为忠实 L 模

Pf: 即证: 若 $x\in L$ s.t. $[xv]=0$, $\forall v\in V$, 则 $x=0$.

设 $x = \sum_{i<j} c_{ij}[v_iv_j]$, 令 $C=(c_{ij})$, 其中 $c_{ji} = -c_{ij}$, $i<j$

$[xv]=0 \Rightarrow \sum_{i<j} c_{ij}[[v_iv_j]v] = 0$

$\overset{\text{引理(1)}}{\Rightarrow} \sum_{i<j} c_{ij}((v_j,v)v_i - (v_i,v)v_j) = 0$

比较 v_i 系数, 得 $\sum_{i<j} c_{ij}(v_j,v) - \sum_{j<i} c_{ji}(v_j,v) = 0$, $\forall i$

由 $c_{ij} = -c_{ji}$, 得 $\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(v_j v) = 0$

记 $m_{ij} = (v_i,v_j) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(v_j v_k) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} m_{jk} = 0$, $\forall i,k$

$\therefore CM = 0$

∴ M 非退化时，$C=0$，即 $x=0$ #

Note：在 C 反对称的条件下，$CM=0$ 仅有零解 $\not\Rightarrow$ M 可逆

例：$M=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$CM=0 \Rightarrow C=\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}=0$

故反命题不正确.

④ 不变性

$x\in L,\ v,v'\in V \Rightarrow ([xv],v')+(v,[xv'])=0$

pf：$x=[yz]$，$y,z\in V \Rightarrow ([[yz],v],v')=(z,v)\cdot(y,v')-(y,v)\cdot(z,v')$

$=-([[xv],v'],v)$ #

Note：$\rho: L\times L\to L$ 与 $(\ ,\ ): L\times L\to C$

满足 $([xy],z)=(x,[y,z])$ 为李代数上的不变性

3. B_l 李代数模

① 令 $\dim V=2l-1$，$v_0,v_1,\cdots,v_l,v_{-1},\cdots,v_{-l}$ 为某一组基.

令 $\varphi: V\times V\to C$，即其矩阵为 $\begin{pmatrix}2&&\\&&I_l\\&I_l&\end{pmatrix}$

$\begin{cases}(v_0,v_0)\mapsto 2\\(v_i,v_{-i})\mapsto 1\\\text{其它}\mapsto 0\end{cases}$

L 在 V 上作用忠实 $\Rightarrow \rho: L\to \operatorname{End}V$

由 L 不变性，$X\in L \Rightarrow \varphi(Xv,v')+\varphi(v,Xv')=0$，$\forall v,v'$

$\Rightarrow v^TX^TMv'+v^TMXv'=0$，$\forall v,v'$

$\Rightarrow v^T(X^TM+MX)v'=0$，$\forall v,v'$

$\Rightarrow X^TM+MX=0$

又 $B_l=\operatorname{span}\{X \mid X^TM+MX=0\}$，且 $\dim B_l=\dim L$

∴ $L=B_l$

② 现 $C(V)$ 作成 L 模，从中构造所需基本模.

令 $u_i=v_0v_i$，$u_{-i}=v_0v_{-i}$，$i=1,\cdots,l$

$U=\operatorname{span}\{u_{-j_1}\cdots u_{-j_t}u_1\cdots u_l \mid 1\le j_1<\cdots<j_t\le l\}$

则某线性无关，继而 $\dim U = 2^l$

③ 运算上：(1) 由 $v_i v_j = -v_j v_i + 2(v_i, v_j)\cdot 1$

知 $\begin{cases} v_i v_j = -v_j v_i, & i+j\neq 0 \\ v_0 v_0 = 2 \\ v_i v_{-i} = -v_{-i} v_i + 2\cdot 1 \end{cases}$

(2) 由 $u_i \cdot u_j = v_0 v_i \cdot v_0 v_j = -v_0^2 v_i v_j = -2 v_i v_j$

$u_j u_i = -2 v_j v_i$

得 $\begin{cases} u_i u_j = -u_j u_i, & i+j\neq 0 \\ u_i \cdot u_{-i} = -u_{-i} u_i - 4\cdot 1 \end{cases}$

④ $U \subseteq C(V)^+$ 且 $C(V)^+ U \subseteq U$，即 U 作成 $C(V)^+$ 的左理想.

Pf: 由 $v_i v_j = -\frac{1}{2} u_i u_j$ 知，$\{u_i\}$ 作成 $C(V)^+$ 的生成元.

$\forall u_i$，对 $u = u_{j_1} \cdots u_{j_t} \cdot u_1 \cdots u_l \in U$

有 $u_i \cdot u = \begin{cases} \pm 4\, u_{-j_1} \cdots \hat{u}_i \cdots u_{-j_t} u_1 \cdots u_l, & 若 i \in \{j_1, \cdots, j_t\} \\ \pm u_{-j_1} \cdots u_i \cdots u_{-j_t} \cdot u_1 \cdots u_l, & 若 i \in \{-1, \cdots, -l\} \setminus \{-j_1, \cdots, -j_t\} \\ 0, & 其它情形. \end{cases}$

$\therefore U$ 作成左 $C(V)^+$ 模

Note: $C(V)^+$ 作成 $C(V)$ 的子代数，L 作成 $C(V)^+$ 的子李代数.

Note2: 此处模为代数模，而前边讨论的是李模

⑤ $L \cong B_l$，且其中 $[v_i\ v_{-i}]$ 对应元素为 $\mathrm{diag}(0, \cdots, \overset{(i)}{4}, \cdots, \overset{(l-i)}{-4}, \cdots 0)$

Pf: $[[v_i\ v_{-i}]\ v_0] = 0$

$[[v_i\ v_{-i}]\ v_j] = 4\delta_{ij} \cdot v_i$

$[[v_i\ v_{-i}]\ v_{-j}] = -4\delta_{ij}\ v_{-i}$

Note: 由 $\phi: L \to \operatorname{End} V$，$L$ 中元素 $[v_i\ v_j]$ 可写为具体矩阵

推论: $h = \sum_{i=1}^{l} \frac{\lambda_i}{4} [v_i, v_{-i}]$ 对应矩阵为 $\mathrm{diag}(0, \lambda_1, \cdots, \lambda_l, -\lambda_1, \cdots, -\lambda_l)$

⑥. 最后.确定 U 的权集

由 $[v_i\ v_{-i}] = \frac{1}{2}(u_i u_{-i} - u_{-i}u_i) = u_{-i}u_i + 2$

得 $[v_i v_{-i}].(u_{-j_1}\cdots u_{-j_t}u_1\cdots u_l) = \begin{cases} 2(u_{-j_1}\cdots u_{-j_t}u_1\cdots u_l), & 若\ i\notin\{j_1\cdots j_t\} \\ -2(u_{-j_1}\cdots u_{-j_t}u_1\cdots u_l), & 若\ i\in\{j_1\cdots j_t\} \end{cases}$

$\therefore h(u_{-j_1}\cdots u_{-j_t}u_1\cdots u_l) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i\lambda_i)\cdot(u_{-j_1}\cdots u_{-j_t}u_1\cdots u_l)$

其中 $\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & 若\ i\notin\{j_1\cdots j_t\} \\ -1, & 若\ i\in\{j_1\cdots j_t\} \end{cases}$

令 $\mu_i\in H^*$, s.t. $\mu_i(h) = \lambda_i$.

$\therefore$ U 的权集为 $\{\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i\mu_i) \mid \varepsilon_i = \pm1$ 可任取$\}$

$\therefore$ $w_l = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\mu_i \in U$ 为 V 的最高权

$\therefore$ $L(w_l)\subseteq U$, 比较维数, 其取到等号 #

Note: $\{\mu_i\}$ 为 H^* 的标准基, 且由前边构造 $w_i\ (i<l)$ 基本模的过程中知, $w_l = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\mu_i$ #

4、D_l 基本模

Note: $\begin{cases}\mu_1+\cdots+\mu_{l-1} = w_{l-1}+w_l \\ \mu_l = w_l - w_{l-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_l = \frac{1}{2}(\mu_1+\cdots+\mu_l) \\ w_{l-1} = \frac{1}{2}(\mu_1+\cdots+\mu_{l-1}-\mu_l)\end{cases}$

① 设 $\dim V = 2l$, $v_1\cdots v_l, v_{-1}\cdots v_{-l}$ 为某组基.

令 $(,): V\times V\to\mathbb{C}$, 即其矩阵为 $M = \begin{pmatrix} & I_l \\ I_l & \end{pmatrix}$

$(v_i, v_{-i})\mapsto 1$

V 作成 L 模诱导 $\rho: L\hookrightarrow \operatorname{End}V$.

且有 $L\subseteq\{X \mid X^TM+MX=0\} = D_l$

由 $\dim L = l(2l-1) = \dim D_l$, 得 $L = D_l$

② 令 $U = \operatorname{span}\{v_{-j_1}\cdots v_{-j_t}v_1\cdots v_l \mid 1\le j_1<\cdots<j_t\le l\}$

则 $\dim U = 2^l$

③ 运算上: $\begin{cases} v_iv_j = -v_jv_i, & i+j\neq 0 \\ v_iv_{-i} = -v_{-i}v_i + 2.1 \end{cases}$

(2) $v_i(v_{j_1}\cdots v_{j_t}v_1\cdots v_l)=\begin{cases}\pm 2\cdot v_{j_1}\cdots\hat{v}_{-i}\cdots v_{j_t}v_1\cdots v_l, & i\in\{j_1,\cdots,j_t\}\\ \pm v_{j_1}\cdots v_i\cdots v_{j_t}v_1\cdots v_l, & i<0\text{ 且 } i\notin\{j_1,\cdots,j_t\}\\ 0 & \text{其它情形.}\end{cases}$

(3). 由运算知，U 作成 $C(V)$ 模.

令 $U^+=U\cap C(V)^+$，$U^-=U\cap C(U)^-$

由 $C(V)^+C(U)^+\subseteq C(V)^+$ 知，U^+ 作成 $C(V)^+$ 模

由 $C(V)^+C(U)^-\subseteq C(V)^-$ 知，U^- 作成 $C(V)^+$ 模

$\therefore$ U^+，U^- 均作成 L 模.

(4) 最后，确定 U^+，U^- 上的权集

令 $h=\sum_{i=1}^{l}\frac{\lambda_i}{4}\cdot[v_iv_{-i}]$，同 B_l 讨论，h 对应矩阵为 $diag(\lambda_1,\cdots\lambda_l,-\lambda_1,\cdots-\lambda_l)$

由 $[v_iv_{-i}]=2-2v_{-i}v_i$，得

$[v_iv_{-i}].v_{j_1}\cdots v_{j_t}v_1\cdots v_l=\begin{cases}-2\cdot v_{j_1}\cdots v_{j_t}v_1\cdots v_l, & i\in\{j_1\cdots j_t\}\\ 2\cdot v_{j_1}\cdots v_{j_t}v_1\cdots v_l, & i\notin\{j_1\cdots j_t\}\end{cases}$

$\therefore$ $h.v_{j_1}\cdots v_{j_t}v_1\cdots v_l=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i\lambda_i)\cdot v_{j_1}\cdots v_{j_t}v_1\cdots v_l$

其中 $\varepsilon_i=\begin{cases}-1, & i\in\{j_1\cdots j_t\}\\ 1, & i\notin\{j_1\cdots j_t\}\end{cases}$

令 $\mu_i\in H^*$，s.t. $\mu_i(h)=\lambda_i$

则 U^+ 的权集为 $\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i\mu_i \mid \text{其中 } \varepsilon_i=\pm1，\text{且 } \prod\varepsilon_i=(-1)^l\}$

U^- 的权集为 $\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i\mu_i \mid \text{其中 } \varepsilon_i=\pm1，\text{且 } \prod\varepsilon_i=(-1)^{l+1}\}$

$\therefore$ l 偶时，$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\mu_i$ 为 U^+ 的最高权，$\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{l-1}\mu_i-\mu_l)$ 为 U^- 最高权

l 奇时，$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\mu_i$ 为 U^- 的最高权，$\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{l-1}\mu_i-\mu_l)$ 为 U^+ 最高权

综上，比较维数知，l 偶 $\Rightarrow$ $L(w_l)=U^+$，$L(w_{l-1})=U^-$

l 奇 $\Rightarrow$ $L(w_l)=U^-$，$L(w_{l-1})=U^+$

Cpt 13.7. 限制映射.

1. 令 V 为 C_l 自然表示的空间

① 注意到 w_i 为 $\wedge^i V$ 中的最高权,

$L(w_1)=\wedge^1 V$，而 $\dim L(w_i) = \dim \wedge^i V - \dim \wedge^{i-2} V$，$i \geq 2$

考虑 $\wedge^i V$ 到 $\wedge^{i-2} V$ 的满同态，证其 ker 恰为所求.

② 令 $(\,,\,): V\times V \to \mathbb{C}$，以 $M=\begin{pmatrix} & I_l \\ -I_l & \end{pmatrix}$ 为内积阵

令 $\theta: \wedge^i V \to \wedge^{i-2} V$

$$u_1\wedge\cdots\wedge u_i \mapsto \sum_{r<s} (-1)^{r+s-1}(u_r,u_s)\cdot u_1\wedge\cdots\wedge \hat{u}_r\wedge\cdots\wedge\hat{u}_s\wedge\cdots\wedge u_i$$

则 θ 良定义且作成模同态

③ 注意到 w_i 不为 $\wedge^{i-2}V$ 的权

$\therefore L(w_i) \subseteq \ker\theta$,

比较维数，只须证 θ 为满射. 此处略去.

Note: U 以 w_i 为最高权 $\Rightarrow L(w_i)$ 为商模.

由 $L(w_i) \hookrightarrow U \twoheadrightarrow L(w_i) \Rightarrow L(w_i)$ 为 U 的直和项

2. 取 V 为 C_l 自然表示，则

① $L(w_1) = V$

② 令 $\theta: \wedge^i V \to \wedge^{i-2} V$ 为上边定义

则 $L(w_i) = \ker\theta$，$i \geq 2$.

Cpt 13.8. Exceptional 李代数的基本模

1. 利用公式

$$\dim L(\lambda_i) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} d_\alpha，其中\ d_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{l} k_i + k_i}{\sum_{i=1}^{l} k_i}，\alpha^\vee = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i^\vee$$

得 $E-G$ 族的基本模维数 (参看书本)

2. E_6 基本模

E_6 视为 E_7 子代数，E_7 不在 E_6 上的正根有27个

这些正根对应 e_α 张成空间 V 作成 E_6-模.

Note: 列举根系，并检验运算

① V 的最高权为 $-\beta_1-\beta_8=w_8$，即 $L(w_8)=V$

Pf: μ 为 V 最高权 $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda$ 为 V 权，有 $\mu-\lambda$ 为若干正根和

令 $h\in H$ s.t. $\alpha(h)=1$, $\forall\alpha\in\Delta$

则 μ 为 V 最高权 $\Rightarrow \mu(h)\geq\lambda(h)$, $\forall\lambda$ 为 V 权

由此得到 μ 的一个必要性刻画

借此从 V 的27个权中找到最高权 $-\beta_1-\beta_8$

由 $\langle\lambda_i,\alpha_j\rangle=\delta_{ij}$，确定其恰为 w_6

比较维数，得 $L(w_8)=V$

② $L(w_3)=V^*$

(1) 由 $-t: \mathrm{End}V\longrightarrow\mathrm{End}V^*$,

$$f\mapsto -{}^tf: \begin{matrix}V^*\to V^*\\ g\mapsto -g\circ f\end{matrix}$$

$$-{}^t([f_1,f_2])(g)=-{}^t(f_1f_2)(g)+{}^t(f_2f_1)(g)$$

$$=g\circ f_2\circ f_1-g\circ f_1\circ f_2$$

$$[-{}^tf_1,-{}^tf_2](g)=(-{}^tf_1\circ-{}^tf_2)(g)-(-{}^tf_2\circ-{}^tf_1)(g)$$

$$=g\circ f_2\circ f_1-g\circ f_1\circ f_2$$

知，$-t$ 作成李代数同态

$\therefore$ $-t$ 使 V 上 L 模转移到 V^* 上.

Note: 若去负号，${}^t([f_1f_2])g=g\circ f_1\cdot f_2-g\circ f_2\cdot f_1$

$[{}^tf_1,{}^tf_2](g)=g\circ f_2\circ f_1-g\circ f_1\circ f_2$，二者不等！

(2) 此外，V^* 作成 L 模，h 在 V 上权为 $\mu\Rightarrow h$ 在 V^* 上权为 $-\mu$

Pf: $h.v=\mu(h)v\Rightarrow h.g(v)=-g(h(v))=-\mu(h)\cdot g(v)$, $\forall v$

$\Rightarrow h.g=-\mu(h).g$ #

(3) 即V上最低权作成V^*上最高权

同③方法知，V^*最高权为$\beta_3-\beta_2=w_3$

∴ $V^*=L(w_3)$

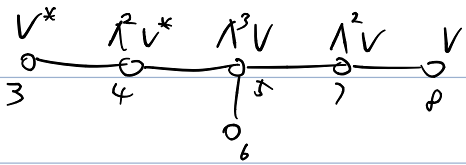
③. 由外代数性质，检查根子知 $L(w_7)=\Lambda^2 V$

类似地 $L(w_5)=\Lambda^3 V=\Lambda^3 V^*$

$L(w_2)=\Lambda^2(V^*)$

此外，$L(w_6)=L$

综上.



3. E_7 基本模

① E_7作为E_8子模，其中不落在E_8上的正根有57个

这些正根对应e_α张成空间V作成E_7-模.

且 $V=L(w_2)\oplus L(0)$

Note：同E_6方法，找 highest weight

② 令 $V'=L(w_2) \Rightarrow \Lambda^2V'$ 中 以w_3为最高权

$\Rightarrow \Lambda^2V'$ 以 $L(w_3)$ 为直和项

比较维数知，$\Lambda^2V'=L(w_3)\oplus L(0)$

同样地，Λ^3V' 以 w_4 为最高权，

观察权集 得 $\Lambda^3V'=L(w_4)\oplus L(w_2)$

类似地，$\Lambda^4V'=L(w_5)\oplus L(w_3)\oplus L(0)$

③. 考察E_7的伴随模，其最高权为w_8，

比较维数得 $L=L(w_8)$

注意到 w_7 为 Λ^2L 最高权.

比较维数，得 $\Lambda^2L=L(w_7)\oplus L(0)$

Note：E_7中$L(w_6)$被跳过了！

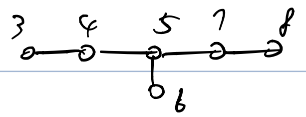
最后考虑 E_8，E_8 作为伴随模作成 $L(w_1)$

其余情形这里不做讨论.

4、F_4 基本模

① 先将 F_4 视为 E_6 子代数

(1) 对 E_6：



令 $\sigma=(38)(47)(5)(6)$ 诱导 E_6 上图同构.

同时 $\sigma(\alpha_i)=\alpha_{\sigma(i)}$，$\sigma(e_i)=e_{\sigma(i)}$，$\alpha_i\in\Delta$

(2) E_6 根系 Φ 在 σ 作用下，分为48个轨道.

其中24个1元轨，24个2元轨

令

$$E_1=e_6\quad E_2=e_5\quad E_3=e_4+e_7\quad E_4=e_3+e_8$$
$$F_1=f_6\quad F_2=f_5\quad F_3=f_4+f_7\quad F_4=f_3+f_8$$
$$H_1=h_6\quad H_2=h_5\quad H_3=h_4+h_7\quad H_4=h_3+h_8$$

则其作成 F_4 的标准生成元.

② 令 V 为 E_6 基本模 $L(w_8)$，则 V 作成 F_4 模

V 以 w_4 为最高权，比较维数得

$V=L(w_4)\oplus L(0)$ 为 F_4-模分解

③ F_4 本身作成 F_4-模，以 w_1 为最高权，即 $L(w_1)=L$

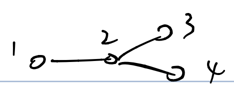
最后，$\wedge^2 L(w_1)=L(w_1)\oplus L(w_2)$

$\wedge^2 L(w_4)=L(w_1)\oplus L(w_3)$

5. G_2 模

① 将 G_2 视为 D_4 子代数

(1) D_4：



令 $\sigma=(1)(34)(2)$，则 σ 诱导 D_4 上图同构.

$\sigma(e_i)=e_{\sigma(i)}$，$\sigma(\alpha_i)=\alpha_{\sigma(i)}$，$\alpha_i\in\Delta$

Φ 在 σ 下分成12个轨道，6个1元轨，6个3元轨

(2) 令 $\begin{cases} E_1 = e_2, & E_2 = e_1 + e_3 + e_4 \\ F_1 = f_2, & F_2 = f_1 + f_3 + f_4 \\ H_1 = h_2, & H_2 = h_1 + h_3 + h_4 \end{cases}$

则其作成 G_2 标准基

②. 令 V 为 D_4 的伴随表示空间，则 V 作成 G_2 模

V 以 w_2 为最高权，H_0 特征数得

$V = L(w_2) \oplus L(w_1)$ 为 G_2 模分解

③ G_2 上伴随模作成 $L(w_1)$ #

综上，除 E_7 中的 $L(w_6)$，E_8 中的 $L(w_i)$，$i>1$，

"例外额"基本模均做了构造.